実数 $x,\ y$ が，$x>0,\ y>0,\ 2x+y=1$ を満たすとき，xy のとりうる値の最大値を求めよ．また，そのときの $x,\ y$ の値を記せ．

(23 岩手大 教育・理工・農 1(1))

【答】 $x=\dfrac{1}{4},\ y=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{8}$

【解答】

$x>0,\ y>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{2x+y}{2} \geqq \sqrt{2x\cdot y}$$

が成り立つ．$2x+y=1$ でもあるから

$$\frac{1}{2} \geqq \sqrt{2xy}$$

$$\therefore\quad xy \leqq \frac{1}{8}$$

等号が成り立つのは

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x=y \end{cases} \qquad \therefore\quad x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2}$$

のときである．

よって，xy は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2}}\ \textbf{のとき，最大値}\ \boldsymbol{\frac{1}{8}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．