半径 5 の円から，その円に内接する長方形 R を取り除いた図形を S とする．このとき，S の面積が最小となる長方形 R の 4 つの辺の長さの合計を求めなさい．

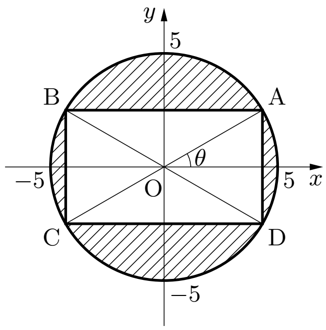
(23 福島大 後 共生システム理工 1(4))

【答】 $20\sqrt{2}$

【解答】

図形 S の面積が最小となるのは，長方形 R の面積 T が最大となるときである．

右図のように長方形 R の頂点を A, B, C, D，直線 AC と x 軸とのなす角を θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと



$$\begin{aligned} T &= 2 \times (\triangle\text{ACD の面積}) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot \text{CD} \cdot \text{AD} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot 10\cos\theta \cdot 10\sin\theta \\ &= 50\sin 2\theta \end{aligned}$$

となる．

T が最大となるのは $2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときであり，長方形 R は正方形である．このとき，正方形 R の 1 辺の長さは $10\sin\dfrac{\pi}{4} = 5\sqrt{2}$ であり，求める 4 つの辺の長さの合計は

$$4 \times 5\sqrt{2} = \boldsymbol{20\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 次のように考えてもよい．

  点 A の座標を $(x,\ y)$ とおくと

  $$0 < x < 5,\ 0 < y < 5,\ x^2 + y^2 = 25 \qquad \cdots\cdots \text{ア}$$

  である．

  $$\begin{aligned} T &= 4xy = 4\sqrt{x^2y^2} \\ &\leqq 4 \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の関係}) \\ &= 50 \quad (\because\ \text{ア}) \end{aligned}$$

  等号は ア かつ $x^2 = y^2$，すなわち $x = y = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ のとき成立する．

  よって，長方形 R の面積 T は $x = y = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ のとき最大となり，そのときの 4 つの辺の長さの合計は

  $$2(2x + 2y) = 4\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}\right) = 20\sqrt{2}$$

  である．