a は定数とし，関数 $f(x)=|x^2-ax|+|a|$ を考える．関数 $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を M とする．以下の問に答えよ．

(1) $a \leqq 0$ のとき，M を a の式で表せ．

(2) $a>0$ で $M=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ となるように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(23 群馬大 理工・情報 1)

【答】

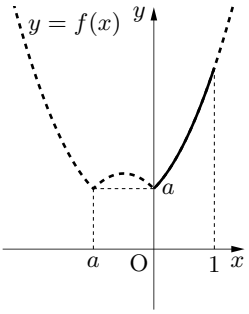
(1) $1-2a$

(2) $2\sqrt{2}-2 \leqq a \leqq 2$

【解答】

$$f(x)=|x^2-ax|+|a| \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$
$$=|x(x-a)|+|a|$$

(1) $a \leqq 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ では $x(x-a) \geqq 0$ であるから



$$f(x)=x^2-ax-a$$
$$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a$$

軸は $x=\dfrac{a}{2}(\leqq 0)$ なので，$f(x)$ は $x=1$ で最大値をとる．

よって

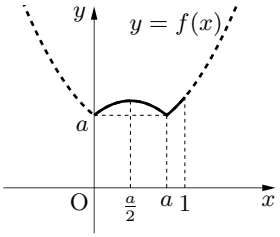
$$M=f(1)=\boldsymbol{1-2a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $a>0$ で $M=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ となるためには

$$0 \leqq \frac{a}{2} \leqq 1 \qquad \therefore \quad 0 \leqq a \leqq 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

が必要である．a が ① をみたすとき

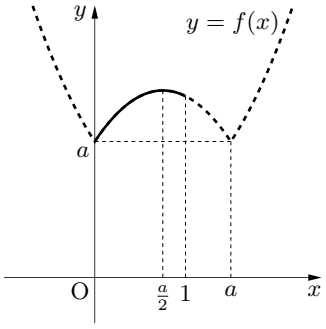


$$M=\max\left\{f\left(\frac{a}{2}\right),\ f(1)\right\}$$

であるから，$M=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ となる条件は

$$f\left(\frac{a}{2}\right) \geqq f(1)$$

が成り立つことである．



$$\left|-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right|+a \geqq |1-a|+a$$
$$\iff \frac{a^2}{4} \geqq |1-a|$$
$$\iff -\frac{a^2}{4} \leqq 1-a \leqq \frac{a^2}{4}$$
$$\iff \begin{cases} a^2-4a+4 \geqq 0 \ (\text{つねに成立する}) \\ a^2+4a-4 \geqq 0 \end{cases}$$
$$\therefore \quad a \leqq -2-2\sqrt{2},\ \ -2+2\sqrt{2} \leqq a$$

① にも注意すると，a の値の範囲は

$$\boldsymbol{2\sqrt{2}-2 \leqq a \leqq 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．