2 次関数 $y = x^2 + 2(m-1)x + 2m^2 - 7$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(23 茨城大 工 2(1))

【答】 $-4 < m < 2$

【解答】

$$f(x) = x^2 + 2(m-1)x + 2m^2 - 7$$

とおく．$y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わる条件は，方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであり，$f(x) = 0$ の判別式を D とおくと，$D > 0$ である．

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (m-1)^2 - (2m^2 - 7)\\ &= -m^2 - 2m + 8\\ &= -(m+4)(m-2)\end{aligned}$$

求める条件は

$$-(m+4)(m-2) > 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{-4 < m < 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $$\begin{aligned}f(x) &= (x+m-1)^2 - (m-1)^2 + 2m^2 - 7\\ &= (x+m-1)^2 + m^2 + 2m - 8\end{aligned}$$

  $y = f(x)$ のグラフは下に凸であり，$y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わる条件は，頂点の y 座標が負となることである．すなわち

  $$\begin{aligned}&m^2 + 2m - 8 < 0\\ &(m+4)(m-2) < 0\\ \therefore \quad &-4 < m < 2\end{aligned}$$

  である．