

$x > 0$ とする. $\left(x + \frac{4}{x^3}\right)\left(x^3 + \frac{4}{x}\right)$ のとり得る値の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

(23 金沢工大 B 1(6))

【答】 $x = \sqrt{2}$ のとき, 最小値 16

【解答】

$$\left(x + \frac{4}{x^3}\right)\left(x^3 + \frac{4}{x}\right) = x^4 + \frac{16}{x^4} + 8$$

$x^4 > 0, \frac{16}{x^4} > 0$ より, 相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$x^4 + \frac{16}{x^4} + 8 \geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{16}{x^4}} + 8 = 2 \cdot 4 + 8 = 16$$

が成り立つ. 等号が成り立つのは

$$x^4 = \frac{16}{x^4} \quad \therefore x^8 = 2^4 \quad \therefore x = \sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

のときである. よって, $\left(x + \frac{4}{x^3}\right)\left(x^3 + \frac{4}{x}\right)$ は

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき, 最小値 } 16 \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.