関数 $f(x)=\sqrt{x}+1$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ に対し，方程式 $f(x)=f^{-1}(x)$ を解きなさい．

(23 公立千歳科技大 中期 理工 1(7))

【答】 $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

【解答】

$y=\sqrt{x}+1\ (x\geqq 0)$ の値域は $y\geqq 1$ であり，x について解くと

$$x=(y-1)^2$$

であるから，$f(x)=\sqrt{x}+1$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x)=(x-1)^2$$

であり，定義域は $x\geqq 1$ である．

$x\geqq 0$ かつ $x\geqq 1$，すなわち $x\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)=f^{-1}(x) &\iff \sqrt{x}+1=(x-1)^2 \\ &\iff \sqrt{x}=x^2-2x \\ &\iff \begin{cases} x=(x^2-2x)^2 \\ x^2-2x\geqq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=x^2(x-2)^2 \\ x\geqq 2 \quad (\because\ x\geqq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

第 1 式を整理すると

$$x\{x(x^2-4x+4)-1\}=0$$

$$x(x^3-4x^2+4x-1)=0$$

$$x(x-1)(x^2-3x+1)=0 \qquad \therefore\quad x=0,\ 1,\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x\geqq 2$ より，求める解は

$$\boldsymbol{x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 逆関数を求めずに，合成を利用することもできる．

  $$f(x)=f^{-1}(x) \iff f\circ f(x)=x \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

  $f(x)=\sqrt{x}+1\ (x\geqq 0)$ より

  $$f\circ f(x)=f(\sqrt{x}+1)=\sqrt{\sqrt{x}+1}+1$$

  であり

  $$\begin{aligned} (*) &\iff \sqrt{\sqrt{x}+1}+1=x \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{x}+1=(x-1)^2 \\ x-1\geqq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{x}=x^2-2x \\ x\geqq 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=(x^2-2x)^2 \\ x^2-2x\geqq 0 \\ x\geqq 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=x^2(x-2)^2 \\ x\geqq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

  以下，解答と同じ．