p を実数とする．曲線 $y = |x^2 + x - 2|$ と直線 $y = x + p$ の共有点の個数を求めよ．

(23 千葉大 3(1))

【答】

p	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
個数	0	1	2	3	4	3	2

【解答】

$$|x^2 + x - 2| = x + p \iff |x^2 + x - 2| - x = p$$

であり，曲線 $y = |x^2 + x - 2|$ と直線 $y = x + p$ の共有点の個数は曲線 $y = |x^2 + x - 2| - x$ と直線 $y = p$ の共有点の個数と一致する．$f(x) = |x^2 + x - 2| - x$ とおくと

$$f(x) = |(x + 2)(x - 1)| - x$$

であるから

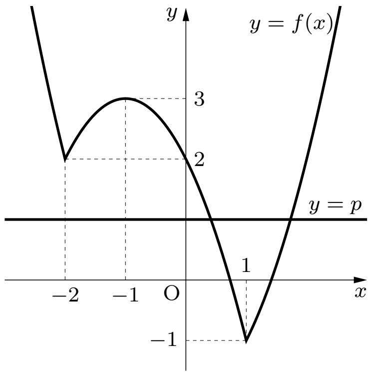
$$\begin{array}{ll} x \leqq -2,\ 1 \leqq x \text{ のとき} & f(x) = (x^2 + x - 2) - x = x^2 - 2 \\ -2 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} & f(x) = -(x^2 + x - 2) - x = -x^2 - 2x + 2 \end{array}$$

であり

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & (x \leqq -2,\ 1 \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x + 1)^2 + 3 & (-2 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

$y = f(x)$ と $y = p$ のグラフは右図となるから，求める共有点の個数は下表となる．



$\boldsymbol{p}$	$\cdots$	$\mathbf{-1}$	$\cdots$	$\mathbf{2}$	$\cdots$	$\mathbf{3}$	$\cdots$
個数	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**3**	**2**

……(答)