関数 $y=ax+b$ は，定義域 $1 \leqq x \leqq 3$ において値域は $3 \leqq y \leqq 5$ である．このとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ．

(23 青森公立大 1(2))

【答】 $(a,\ b)=(1,\ 2)$ または $(-1,\ 6)$

【解答】

$f(x)=ax+b$ とおく．

定義域 $1 \leqq x \leqq 3$ において値域は $3 \leqq y \leqq 5$ であることより，$a \neq 0$ であり

$$(\mathrm{i})\begin{cases} f(1)=3 \\ f(3)=5 \end{cases} \quad \text{または} \quad (\mathrm{ii})\begin{cases} f(1)=5 \\ f(3)=3 \end{cases}$$

である．

(i)のとき

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=5 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=1,\ b=2$$

(ii)のとき

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 3a+b=3 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-1,\ b=6$$

以上 (i)，(ii) から

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 2)} \text{ または } \boldsymbol{(-1,\ 6)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．