a を定数として，$a \leqq x \leqq a+6$ における関数

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + a$$

を考える．

(1) $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ の最小値を a の関数で表し，$m(a)$ とする．このとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

(23 青森公立大 2)

【答】

(1) $\begin{cases} a \leqq -7 \text{ のとき} & \dfrac{1}{2}a^2 + 8a + 24 \\ -7 \leqq \alpha \leqq -1 \text{ のとき} & a - \dfrac{1}{2} \\ a \geqq -1 \text{ のとき} & \dfrac{1}{2}a^2 + 2a \end{cases}$

(2) -8

【解答】

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + a \quad (a \leqq x \leqq a+6)$$

(1) 平方完成すると

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + a - \frac{1}{2}$$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である．軸 $x = -1$ が定義域 $a \leqq x \leqq a+6$ の中にあるか否かで場合分けして，$f(x)$ の最小値を求める．

(i) $a+6 \leqq -1$ $(a \leqq -7)$ のとき

$f(x)$ は $x = a+6$ で最小値 $f(a+6) = \dfrac{1}{2}a^2 + 8a + 24$ をとる．

(ii) $a \leqq -1 \leqq a+6$ $(-7 \leqq a \leqq -1)$ のとき

$f(x)$ は $x = -1$ で最小値 $f(-1) = a - \dfrac{1}{2}$ をとる．

(iii) $a \geqq -1$ のとき

$f(x)$ は $x = a$ で最小値 $f(a) = \dfrac{1}{2}a^2 + 2a$ をとる．

以上 (i)，(ii)，(iii) より，$f(x)$ の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -7 \text{ のとき}} & \boldsymbol{\dfrac{1}{2}a^2 + 8a + 24} \\ \boldsymbol{-7 \leqq \alpha \leqq -1 \text{ のとき}} & \boldsymbol{a - \dfrac{1}{2}} \\ \boldsymbol{a \geqq -1 \text{ のとき}} & \boldsymbol{\dfrac{1}{2}a^2 + 2a} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より

$$m(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a^2+8a+24 & (a \leqq -7 \text{ のとき})\\ a-\dfrac{1}{2} & (-7 \leqq a \leqq -1 \text{ のとき})\\ \dfrac{1}{2}a^2+2a & (a \geqq -1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(a+8)^2-8 & (a \leqq -7 \text{ のとき})\\ a-\dfrac{1}{2} & (-7 \leqq a \leqq -1 \text{ のとき})\\ \dfrac{1}{2}(a+2)^2-2 & (a \geqq -1)\end{cases}$$

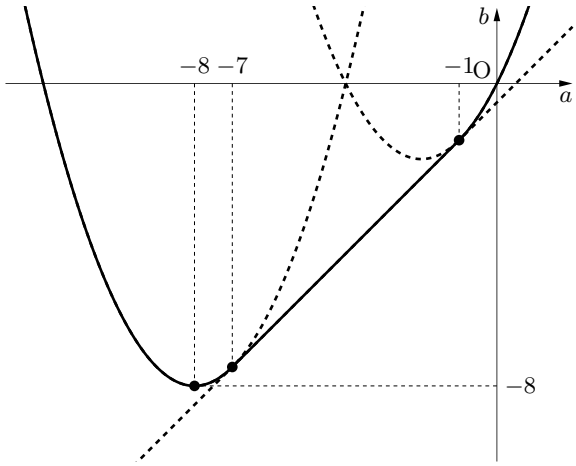
$m(a)$ の最小値は各区間の最小値のうちの最小のものであるから

$$\begin{aligned}&\min\{m(-8),\ m(-7),\ m(-1)\}\\ &=\min\left\{-8,\ -\frac{15}{2},\ -\frac{3}{2}\right\}\\ &=\boldsymbol{-8}\end{aligned}$$

……(答)

である．

- $b=m(a)$ とおくと，そのグラフは下の図の太線部分である．



よって，関数 $m(a)$ は $a=-8$ のとき，最小値 -8 をとる．