x, y, z についての二つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在するかどうかを考えてみよう．

(1) 二つの式が

$$7x + 13y + 17z = 8 \qquad \cdots\cdots ①$$

と

$$35x + 39y + 34z = 37 \qquad \cdots\cdots ②$$

の場合を考える．①, ② から x を消去すると

$$\boxed{\text{アイ}}\,y + \boxed{\text{ウエ}}\,z = 3 \qquad \cdots\cdots ③$$

を得る．③ を y, z についての不定方程式とみると，その整数解のうち，y が正の整数で最小になるのは

$$y = \boxed{\text{オ}}, \quad z = \boxed{\text{カキ}}$$

である．よって，③ のすべての整数解は，k を整数として

$$y = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{クケ}}\,k, \quad z = \boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{コサ}}\,k$$

と表される．これらを ① に代入して x を求めると

$$x = 31k - 3 + \frac{\boxed{\text{シ}}\,k + 2}{7}$$

となるので，x が整数になるのは，k を 7 で割ったときの余りが $\boxed{\text{ス}}$ のときである．

以上のことから，この場合は，二つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在することがわかる．

(2) a を整数とする．二つの式が

$$2x + 5y + 7z = a \qquad \cdots\cdots ④$$

と

$$3x + 25y + 21z = -1 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

の場合を考える．⑤ − ④ から

$$x = -20y - 14z - 1 - a \qquad \cdots\cdots ⑥$$

を得る．また，⑤ × 2 − ④ × 3 から

$$35y + 21z = -2 - 3a \qquad \cdots\cdots ⑦$$

を得る．このとき

a を $\boxed{\text{セ}}$ で割ったときの余りが $\boxed{\text{ソ}}$ である

ことは，⑦ を満たす整数 y, z が存在するための必要十分条件であることがわかる．そのときの整数 y, z を ⑥ に代入すると，x も整数になる．また，そのときの x, y, z は ④ と ⑤ をともに満たす．

以上のことから，この場合は，a の値によって，二つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在する場合と存在しない場合があることがわかる．

(3) b を整数とする．二つの式が

$$x+2y+bz=1 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

と

$$5x+6y+3z=5+b \qquad \cdots\cdots ⑨$$

の場合を考える．⑨ − ⑧ × 5 から

$$-4y+(3-5b)z=b \qquad \cdots\cdots ⑩$$

を得る．⑩ の左辺の y の係数に着目することにより

b を 4 で割ったときの余りが $\boxed{\text{タ}}$ または $\boxed{\text{チ}}$ である

ことは，⑩ を満たす整数 $y,\ z$ が存在するための必要十分条件であることがわかる．ただし，$\boxed{\text{タ}} < \boxed{\text{チ}}$ とする．

そのときの整数 $y,\ z$ を ⑧ に代入すると，x も整数になる．また，そのときの $x,\ y,\ z$ は ⑧ と ⑨ をともに満たす．

以上のことから，この場合も，b の値によって，二つの式をともに満たす整数 $x,\ y,\ z$ が存在する場合と存在しない場合があることがわかる．

(4) c を整数とする．二つの式が

$$x+3y+5z=1 \qquad \cdots\cdots ⑪$$

と

$$cx+3(c+5)y+10z=3 \qquad \cdots\cdots ⑫$$

の場合を考える．これまでと同様に，$y,\ z$ についての不定方程式を考察することにより

c を $\boxed{\text{ツテ}}$ で割ったときの余りが $\boxed{\text{ト}}$ または $\boxed{\text{ナニ}}$ である

ことは，⑪ と ⑫ をともに満たす整数 $x,\ y,\ z$ が存在するための必要十分条件であることがわかる．

(23 共通テスト 追・再試験 IA 4)

【答】

アイ	ウエ	オ	カキ	クケ	コサ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツテ	ト	ナニ
26	51	6	−3	51	26	4	3	7	4	0	2	15	3	13

【解答】

(1)

$$7x+13y+17z=8 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$35x+39y+34z=37 \qquad \cdots\cdots ②$$

① × 5 − ② として，x を消去すると

$$\mathbf{26}y+\mathbf{51}z=3 \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

を得る．③ を $y,\ z$ についての不定方程式とみる．

$$26\cdot 2+51\cdot(-1)=1$$

辺々3 倍すると

$$26 \cdot 6 + 51 \cdot (-3) = 3 \qquad \cdots\cdots ③'$$

③ − ③′ から

$$26(y-6) + 51(z+3) = 0$$
$$\therefore \quad 26(y-6) = -51(z+3)$$

を得る．26 と 51 は互いに素より

$$z + 3 = 26k \ (k \text{ は整数})$$

と表すことができ，このとき

$$y - 6 = -51k \qquad \therefore \quad y = 6 - 51k$$

である．したがって，y が正の整数で最小になるのは $k = 0$ のときで

$$y = \mathbf{6}, \quad z = \mathbf{-3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．よって，③ のすべての整数解は，k を整数として

$$y = 6 - \mathbf{51}k, \quad z = -3 + \mathbf{26}k \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．これらを ① に代入して x を求めると

$$\begin{aligned} 7x &= 8 - 13(6 - 51k) - 17(-3 + 26k) \\ &= 8 - (78 - 663k) + (51 - 442k) \\ &= 221k - 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad x &= \frac{221k - 19}{7} \\ &= 31k - 3 + \frac{\mathbf{4}k + 2}{7} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

となるので，x が整数になるのは，$4k + 2 = 7k'$ (k'は整数) と表されるときであり

$$7k' - 4k = 2$$
$$7 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2$$

辺々ひいて

$$7(k' - 2) - 4(k - 3) = 0$$
$$\therefore \quad 7(k' - 2) = 4(k - 3)$$

7 と 4 は互いに素であるから，$k - 3 = 7k''$ (k''は整数) とおくことができ

$$k = 7k'' + 3$$

すなわち，k を 7 で割ったときの余りが **3** のときである． ……(答)

以上のことから，式 ①，② をともに満たす整数 x，y，z が存在することがわかる．

(2) a は整数である．

$$2x + 5y + 7z = a \qquad \cdots\cdots ④$$
$$3x + 25y + 21z = -1 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ − ④ から

$$x + 20y + 14z = -1 - a$$
$$\therefore \quad x = -20y - 14z - 1 - a \qquad \cdots\cdots ⑥$$

を得る．また，⑤ × 2 − ④ × 3 として，x を消去すると

$$35y + 21z = -2 - 3a \qquad \cdots\cdots ⑦$$
$$7(5y + 3z) = -(3a + 2) \qquad \cdots\cdots ⑦'$$

を得る．このとき $3a+2=7a'$ (a'は整数) と表すことができ

$$7a'-3a=2$$
$$7\cdot 2-3\cdot 4=2$$

辺々引いて

$$7(a'-2)-3(a-4)=0$$
$$\therefore\quad 7(a'-2)=3(a-4)$$

7 と 3 は互いに素であるから，$a-4=7a''$ (a''は整数) とおくことができ

$$a=7a''+4$$

となる．このとき ⑦$'$ は

$$5y+3z=-a'$$

であり，5 と 3 は互いに素なので，これを満たす整数 $y,\ z$ は存在する．すなわち

a を **7** で割ったときの余りが **4** である　……(答)

ことは，⑦ を満たす整数 $y,\ z$ が存在するための必要十分条件であることがわかる．そのときの整数 $y,\ z$ を ⑥ に代入すると，x も整数になる．また，そのときの $x,\ y,\ z$ は ④ と ⑤ をともに満たす．

以上のことから，この場合は，a の値によって，二つの式をともに満たす整数 $x,\ y,\ z$ が存在する場合と存在しない場合があることがわかる．

(3) b は整数である．

$$x+2y+bz=1 \qquad \cdots\cdots ⑧$$
$$5x+6y+3z=5+b \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑨ − ⑧ × 5 として，x を消去すると

$$-4y+(3-5b)z=b \qquad \cdots\cdots ⑩$$

を得る．⑩ を満たす整数 $y,\ z$ が存在する条件は

4 と $3-5b$ が互いに素である

こと，すなわち

$$3-5b=4b'+r \ (r \text{ は } 1 \text{ または } 3)$$

を満たすことである．

$r=1$ のとき

$$4b'+5b=2$$
$$4\cdot 3+5\cdot(-2)=2$$

辺々ひいて

$$4(b'-3)+5(b+2)=0$$
$$4(b'-3)=-5(b+2)$$

4 と 5 は互いに素であるから，$b+2=4b''$ (b'' は整数) とおくことができ

$$b=4b''-2=4(b''-1)+2 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

となる．

$r=3$ のとき

$$-5b=4b'$$

4 と 5 は互いに素であるから，

$$b=4b'''\ (b''' \text{ は整数}) \qquad \cdots\cdots ㋑$$

とおくことができる．

㋐, ㋑ より

b を 4 で割ったときの余りが **0** または **2** である　……(答)

ことが，⑩ を満たす整数 y, z が存在するための必要十分条件であることがわかる．

そのときの整数 y, z を ⑧ に代入すると，x も整数になる．また，そのときの x, y, z は ⑧ と ⑨ をともに満たす．

以上のことから，この場合も，b の値によって，二つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在する場合と存在しない場合があることがわかる．

(4) c は整数である．

$$x+3y+5z=1 \quad \cdots\cdots ⑪$$
$$cx+3(c+5)y+10z=3 \quad \cdots\cdots ⑫$$

⑪ $\times c-$ ⑫ として，x を消去すると

$$-15y+(5c-10)z=c-3$$
$$-5\{3y-(c-2)z\}=c-3 \quad \cdots\cdots ⑬$$

を得る．このとき $c-3=5c'$ (c'は整数) と表すことができ

$$c=5c'+3$$

⑬ は

$$-\{3y-(5c'+3-2)z\}=c'$$
$$3y-(5c'+1)z=-c'$$

となる．これを満たす整数 y, z が存在する条件は

3 と $5c'+1$ が互いに素である

こと，すなわち

$$5c'+1=3c''+r \ (r \text{ は } 1 \text{ または } 2)$$

を満たすことである．

$r=1$ のとき

$$5c'+1=3c''+1$$
$$5c'=3c''$$

c' は 3 の倍数であり $c'=3C$ (C は整数) とおくと

$$c=5\cdot 3C+3=15C+3$$

$r=2$ のとき

$$5c'+1=3c''+2$$
$$\therefore \quad 5c'-3c''=1$$
$$5\cdot 2-3\cdot 3=1$$

辺々ひいて

$$5(c'-2)-3(c''-3)=0$$
$$5(c'-2)=3(c''-3)$$

5 と 3 は互いに素であるから，$c'-2=3C'$ (C' は整数) とおくことができ

$$c=5(3C'+2)+3=15C'+13$$

である．

以上より

c を **15** で割ったときの余りが **3** または **13** である　……(答)

ことは，⑪ と ⑫ をともに満たす整数 x, y, z が存在するための必要十分条件であることがわかる．