200 個から 100 個取る組合せの総数 ${}_{200}\mathrm{C}_{100}$ を素因数分解したとき，2 桁の素因数の中で最大のものは［カ］である．

(23 山梨大 後 医 1(3))

【答】

カ
61

【解答】

$$ {}_{200}\mathrm{C}_{100} = \frac{200!}{100! \cdot 100!} $$

分母 $100! \cdot 100!$ を素因数分解すると，1 以上 100 以下の素数の積として表すことができ，どの素数も 2 回以上現れる．1 以上 100 以下の整数に対しエラトステネスのふるいをかけると，素数は右図のように

$$ 2,\ 3,\ 5 \cdots,\ 83,\ 89,\ 97 $$

の 25 個があることがわかる．

~~1~~	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10
(11)	12	(13)	14	15	16	(17)	18	(19)	20
21	22	(23)	24	25	26	27	28	(29)	30
(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40
(41)	42	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50
51	52	(53)	54	55	56	57	58	(59)	60
(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70
(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80
81	82	(83)	84	85	86	87	88	(89)	90
91	92	93	94	95	96	(97)	98	99	100

素数 97 は分母 $100! \cdot 100!$ に 2 回現れる．$97 \times 2 = 194$ より，素数 97 は分子 $200!$ にも 2 回現れるから，素数 97 は約分され，${}_{200}\mathrm{C}_{100}$ の素因数とならない．

同じく，素数 89，83，79，73，71，67 はどれも約分され，${}_{200}\mathrm{C}_{100}$ の素因数とならない．

素数 61 は分母 $100! \cdot 100!$ に 2 回現れ，$61 \times 3 = 183$ より，分子 $200!$ に 3 回現れるから，${}_{200}\mathrm{C}_{100}$ の 2 桁の素因数となる．

よって，2 桁の素因数で最大のものは

61 ……(答)

である．

- 2 桁の素数を大きい方から調べたが，求める素因数 p は

$$ 3p \leqq 200 \qquad \therefore \quad p \leqq \frac{200}{3} = 66 + \frac{2}{3} $$

を満たす最大な素数，すなわち，61 である．

- 自然数 n について $n!$ に含まれる素因数 p の個数は，ガウス記号を用いて

$$ \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^m}\right] \quad (p^m \leqq n,\ m \text{ は 1 以上の整数}) $$

と表すことができる．2 桁の素因数 p ($p = 11,\ 13,\ 17 \cdots,\ 83,\ 89,\ 97$) のなかで

$$ (\text{分子の素因数 } p \text{ の個数}) > (\text{分母の素因数 } p \text{ の個数}) \qquad \cdots\cdots\ (*) $$

を満たす最大な素数 p を求める．

p は 2 桁であり，$11^2 = 121,\ 13^2 = 169,\ 17^2 = 289$ であるから，$(*)$ は

$$ p = 11,\ 13 \text{ のとき} \qquad \left[\frac{200}{p}\right] + \left[\frac{200}{p^2}\right] > 2 \times \left[\frac{100}{p}\right] $$

$$ p = 17,\ 19, \cdots, 97 \text{ のとき} \quad \left[\frac{200}{p}\right] > 2 \times \left[\frac{100}{p}\right] $$

となる．素数 p が $p \geqq 53$ を満たすとき $\left[\frac{100}{p}\right] = 1$ なので，$(*)$ は

$$ \left[\frac{200}{p}\right] > 2 \times 1 \qquad \therefore \quad \frac{200}{p} \geqq 3 $$

$$ \therefore \quad p \leqq \frac{200}{3} = 66 + \frac{2}{3} $$

求める最大な素数は 61 である．