正の整数 n に対して，n の正の約数の総和を $\sigma(n)$ とする．たとえば，$n=6$ の正の約数は 1, 2, 3, 6 であるから $\sigma(6)=1+2+3+6=12$ となる．以下の問いに答えよ．

(1) $\sigma(30)$ を求めよ．

(2) 正の整数 n と，n を割り切らない素数 p に対して，等式

$$\sigma(pn)=(p+1)\sigma(n)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の条件 (i)，(ii) を満たす正の整数 n をすべて求めよ．

(i) n は素数であるか，または r 個の素数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r$ (ただし r は 2 以上の整数で，$p_1<p_2<\cdots<p_r$) を用いて $n=p_1\times p_2\times\cdots\times p_r$ と表される．

(ii) $\sigma(n)=72$ が成り立つ．

(23 東北大 後 理 4)

【答】

(1) 72

(2) 略

(3) $n=30,\ 46,\ 51,\ 55,\ 71$

【解答】

(1) $30=2\cdot3\cdot5$ の正の約数は 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 であるから

$$\sigma(30)=1+2+3+5+6+10+15+30=\mathbf{72} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $30=2\cdot3\cdot5$ の正の約数の総和は

$$\begin{aligned}\sigma(30)&=(2^0+2^1)(3^0+3^1)(5^0+5^1)\\&=(1+2)(1+3)(1+5)\\&=3\cdot4\cdot6\\&=72\end{aligned}$$

である．

(2) $n\geqq2$ のとき，n の素因数分解を

$$n={p_1}^{a_1}\times{p_2}^{a_2}\times\cdots\times{p_r}^{a_r}$$

$(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r$は素数，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r$は 1 以上の整数$)$

とする．p は n を割り切らない素数であるから

$$pn=p\times{p_1}^{a_1}\times{p_2}^{a_2}\times\cdots\times{p_r}^{a_r}$$

となる．pn の正の約数の総和 $\sigma(pn)$ は

$$\begin{aligned}\sigma(pn)&=(p^0+p^1)({p_1}^0+{p_1}^1+\cdots+{p_1}^{a_1})\cdots({p_r}^0+{p_r}^1+\cdots+{p_r}^{a_r})\\&=(1+p)\sigma(n) \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．

また，$n=1$ のとき，$p\cdot1=p$ であり，$\sigma(p)=1+p,\ \sigma(1)=1$ であるから

$$\sigma(p\cdot1)=\sigma(p)=1+p=\sigma(p)\sigma(1)$$

となり，① は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，正の整数 n と，n を割り切らない素数 p に対して

$$\sigma(pn)=(1+p)\sigma(n)$$

が成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) 条件 (i) より

n は素数
　または
$n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r$　($p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r$ は $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ を満たす素数)

である．

(ア) n が素数のとき
条件 (ii) より

$$1 + n = 72 \qquad \therefore \quad n = 71$$

71 は素数なので適する．

(イ) $n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r$ のとき
条件 (ii) より

$$(1 + p_1)(1 + p_2) \cdots (1 + p_r) = 72$$

である．$2 \leqq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ から

$$(1 + p_1)(1 + p_2) \cdots (1 + p_r) > (1 + 2)^r = 3^r$$

が成り立つから

$$72 > 3^r \qquad \therefore \quad r \leqq 3$$

r は 2 以上の整数であるから，r は 2 または 3 に限る．

○ $r = 2$ のとき

$$(1 + p_1)(1 + p_2) = 72$$

$1 + 2 \leqq 1 + p_1 < 1 + p_2$ であることから

$1 + p_1$	3	4	6	8
$1 + p_2$	24	18	12	9

であり

p_1	2	3	5	7
p_2	23	17	11	8

$(p_1,\ p_2) = (7,\ 8)$ は p_2 が素数であることに反する．

$$\therefore \quad n = p_1 \times p_2 = 46,\ 51,\ 55$$

である．

○ $r = 3$ の場合

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3) = 72$$

$1 + 2 \leqq 1 + p_1 < 1 + p_2 < 1 + p_3$ であることから

$1 + p_1$	3
$1 + p_2$	4
$1 + p_3$	6

であり

p_1	2
p_2	3
p_3	5

$$\therefore \quad n = p_1 \times p_2 \times p_3 = 30$$

である．

以上から，求める正の整数 n は

$$\boldsymbol{n = 30,\ 46,\ 51,\ 55,\ 71}$$ ……(答)

である．