次の問いに答えよ．

(i) $\dfrac{5}{37}$ および $\dfrac{21}{240}$ を小数で表せ．

(ii) $\dfrac{5}{37}$ の小数第 2023 位の数を求めよ．

(iii) n を自然数とする．n の逆数が循環小数 $0.\dot{a}b\dot{c}$ であった．そのような n の個数を求めよ．

(23 東北学院大 文系・情報 A 5)

【答】

(i) $\dfrac{5}{37} = 0.\dot{1}3\dot{5}$，$\dfrac{21}{240} = 0.0875$

(ii) 1

(iii) 5

【解答】

(i) 割り算を実行すると右のようになるから，それぞれを小数で表すと

$$\frac{5}{37} = \mathbf{0.\dot{1}3\dot{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\frac{21}{240} = \mathbf{0.0875} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

```
          0.1 3 5 1
37 ) 5
     3 7
     1 3 0
     1 1 1
       1 9 0
       1 8 5
           5 0
           3 7
           1 3
```

```
          0.0 8 7 5
240 ) 2 1
      1 9 2 0
        1 8 0 0
        1 6 8 0
          1 2 0 0
          1 2 0 0
                0
```

(ii) (1) より $\dfrac{5}{37}$ は小数第 1 位から 1，3，5 の 3 つの数字をこの順に繰り返す．2023 を 3 で割ると

商 674，　余り 1

となるから，$\dfrac{5}{37}$ の小数第 2023 位の数は 1，3，5 の 1 番目，すなわち **1** である．　……(答)

(iii) 循環小数 $0.\dot{a}b\dot{c}$ が存在するのは，a，b，c は 0 以上 9 以下の整数であり，$a = b = c$ とならないときである．

$$\frac{1}{n} = 0.\dot{a}b\dot{c}$$

辺々に 1000 を掛けると

$$\frac{1000}{n} = (100a + 10b + c) + 0.\dot{a}b\dot{c}$$

$$\frac{1000}{n} = 100a + 10b + c + \frac{1}{n}$$

$$n(100a + 10b + c) = 999$$

$$\therefore \quad n(100a + 10b + c) = 3^3 \times 37$$

n は $3^3 \times 37$ の約数である．

- $n = 3^0 \cdot 37^0 = 1$ のとき，$100a + 10b + c = 999$ であり，$\dfrac{1}{1} = 0.\dot{9}$　不適．
- $n = 3^1 \cdot 37^0 = 3$ のとき，$100a + 10b + c = 333$ であり，$\dfrac{1}{3} = 0.\dot{3}$　不適．
- $n = 3^2 \cdot 37^0 = 9$ のとき，$100a + 10b + c = 111$ であり，$\dfrac{1}{9} = 0.\dot{1}$　不適．
- $n = 3^3 \cdot 37^0 = 27$ のとき，$100a + 10b + c = 37$ であり，$\dfrac{1}{27} = 0.\dot{0}3\dot{7}$　適する．
- $n = 3^0 \cdot 37^1 = 37$ のとき，$100a + 10b + c = 27$ であり，$\dfrac{1}{37} = 0.\dot{0}2\dot{7}$　適する．

- $n = 3^1 \cdot 37^1 = 111$ のとき，$100a + 10b + c = 9$ であり，$\dfrac{1}{111} = 0.\dot{0}0\dot{9}$　適する．
- $n = 3^2 \cdot 37^1 = 333$ のとき，$100a + 10b + c = 3$ であり，$\dfrac{1}{333} = 0.\dot{0}0\dot{3}$　適する．
- $n = 3^3 \cdot 37^1 = 999$ のとき，$100a + 10b + c = 1$ であり，$\dfrac{1}{999} = 0.\dot{0}0\dot{1}$　適する．

であり，n の個数は **5** である．　……(答)