実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すとき，次の問いに答えよ．

(i) 実数 x と整数 n に対して，$[x+n]=[x]+n$ を示せ．

(ii) 実数 x と正の整数 n に対して，$\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right]$ を示せ．

(23 東北学院大 文系・情報 B 3)

【答】

(i) 略

(ii) 略

【解答】

(i) $[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表すから

$$[x] \leqq x < [x]+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．各辺に整数 k を加えると

$$[x]+k \leqq x+k < [x]+k+1$$

$[x]+k$ は整数であるから

$$[x+k]=[x]+k$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(ii) ① の各辺を正の整数 n で割ると

$$\frac{[x]}{n} \leqq \frac{x}{n} < \frac{[x]+1}{n} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

整数 $[x]$ を正の整数 n で割ったときの商を k，余りを r とおくと

$$[x]=nk+r \ (0 \leqq r < n)$$

$$\therefore \quad \frac{[x]}{n}=k+\frac{r}{n} \ \left(0 \leqq \frac{r}{n} < 1\right)$$

$$\therefore \quad k \leqq \frac{[x]}{n} < k+1$$

$$\therefore \quad \left[\frac{[x]}{n}\right]=k \qquad \cdots\cdots ③$$

である．

また

$$② \iff \frac{nk+r}{n} \leqq \frac{x}{n} < \frac{nk+r+1}{n}$$

$$\therefore \quad k+\frac{0}{n} \leqq \frac{x}{n} < k+\frac{(n-1)+1}{n}$$

$$\therefore \quad k \leqq \frac{x}{n} < k+1$$

$$\therefore \quad \left[\frac{x}{n}\right]=k \qquad \cdots\cdots ④$$

③, ④ より

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$$

が成り立つ． ……(証明終わり)