次の問いに答えよ．

(1) 整数 n に対して，$x=7n$，$y=17(17-n)$ が不定方程式 $17x+7y=2023$ を満たすことを示せ．

(2) $17x+7y=2023$ を満たす整数 x，y は，整数 n を用いて $x=7n$，$y=17(17-n)$ と表されるものに限ることを示せ．

(3) $17x+7y=2023$ を満たす整数 x，y のうち，$|xy-2023|$ を最小にするものを求めよ．

(23 金沢大 文系 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $(x,\ y)=(7,\ 272),\ (112,\ 17)$

【解答】

$$17x+7y=2023 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $x=7n,\ y=17(17-n)$ を ① の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}17x+7y&=17\cdot(7n)+7\cdot\{17(17-n)\}\\&=17\cdot 7(n+17-n)\\&=7\cdot 17\cdot 17\\&=2023\end{aligned}$$

であり，$x=7n,\ y=17(17-n)$ は ① を満たす． ……(証明終わり)

(2) (1) の n を $n=1$ をおくと

$$17\cdot 17+7\cdot(17\cdot 16)=2023 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立ち，① − ② より，① は

$$\begin{aligned}&17(x-7)+7(y-17\cdot 16)=0\\&\therefore\quad 17(x-7)=-7(y-17\cdot 16)\end{aligned}$$

と表すことができる．7 と 17 は互いに素なので，整数 k を用いて

$$x-7=7k \qquad \therefore\quad x=7(1+k)$$

と表すことができ，このとき

$$\begin{aligned}&17\cdot 7k=-7(y-17\cdot 16)\\&\therefore\quad y=17\cdot 16-17k=17(16-k)\end{aligned}$$

となる．

ここで，$1+k$ を改めて n，すなわち $k=n-1$ とおくと

$$(*)\begin{cases}x=7n\\y=17\{16-(n-1)\}=17(17-n)\end{cases} \qquad (n \text{ は整数})$$

である．

よって，① を満たす整数 $x,\ y$ は $(*)$ と表されるものに限る． ……(証明終わり)

(3) $(*)$ を代入すると

$$\begin{aligned}|xy-2023| &= |7n\cdot 17(17-n)-7\cdot 17^2| \\ &= 7\cdot 17|n^2-17n+17|\end{aligned}$$

$|n^2-17n+17|$ が最小となる整数 n を求める．

まず，方程式 $n^2-17n+17=0$ を解くと

$$n=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 17}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{17\cdot 13}}{2}$$

であり，この n は整数ではない．

次に，方程式 $n^2-17n+17=1$ を解くと

$$\begin{aligned}&n^2-17n+16=0 \\ &(n-1)(n-16)=0 \qquad \therefore \quad n=1,\ 16\end{aligned}$$

である．

また，方程式 $n^2-17n+17=-1$ を解くと

$$n=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 18}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{217}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{7\cdot 31}}{2}$$

であり，この n は整数でない．

以上より $|n^2-17n+17|$ は $n=1,\ 16$ のとき最小値 1 をとる．

よって，$|xy-2023|$ は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(7,\ 272),\ (272,\ 17)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のとき，最小値 $7\cdot 17\cdot 1=119$ をとる．