集合 $\{3m+5n \,|\, m,\ n$ は自然数 $\}$ の要素でない自然数のうち，最大のものは $\boxed{⑦}$ である．

(23 関西大 全学日程 理系 2 月 7 日 4(5))

【答】

⑦
15

【解答】

l を集合 $\{3m+5n \,|\, m,\ n$ は自然数 $\}$ の要素とすると

$$3m+5n=l \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．特殊解として

$$3\cdot(2l)+5\cdot(-l)=l \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．①, ② の辺々を引くと

$$3(m-2l)+5(n+l)=0$$
$$\therefore\ \ 3(m-2l)=-5(n+l)$$

3 と 5 は互いに素であるから $m-2l=5k$ (k は整数) と表すことができ，このとき，$n+l=-3k$ となる．

$$\begin{cases} m=2l+5k \\ n=-l-3k \end{cases} \qquad \cdots\cdots ③$$

である．③ を満たす自然数 $m,\ n$ が存在する条件は

$$\begin{cases} 2l+5k>0 \\ -l-3k>0 \end{cases} \text{ を満たす整数 } k \text{ が存在する} \qquad \cdots\cdots (*)$$

ことであり

$$\begin{cases} 2l+5k>0 \\ -l-3k>0 \end{cases} \iff -\frac{2l}{5}<k<-\frac{l}{3}$$

であるから，$\left(-\dfrac{l}{3}\right)-\left(-\dfrac{2l}{5}\right)>1$ ならば，$(*)$ が成り立つ．整理すると

$$\frac{l}{15}>1 \qquad \therefore\ \ l>15$$

すなわち，16 以上の整数 l に対して，① を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ は存在する．

次に，$3m+5n=15$ $\cdots\cdots$ ④ について調べる．

$$3m=5(3-n)$$

3 と 5 は互いに素であり，$m=5k'$ (k' は整数) と表すことができる．このとき，$3-n=3k'$ となる．

$$\begin{cases} m=5k' \\ n=3-3k' \end{cases} \qquad \cdots\cdots ④'$$

である．④$'$ を満たす自然数 $m,\ n$ が存在する条件は

$$\begin{cases} 5k'>0 \\ 3-3k'>0 \end{cases} \text{ を満たす整数 } k' \text{ が存在する}$$

ことであるが

$$\begin{cases} 5k' > 0 \\ 3 - 3k' > 0 \end{cases} \iff 0 < k' < 1$$

であり，整数 k は存在しない．すなわち，④ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ は存在しない．

よって，集合 $\{3m + 5n \,|\, m,\ n$ は自然数 $\}$ の要素でない自然数のうち，最大のものは

15 ……（答）

である．