集合 A を次で定義する．

$$A = \{m^2 - n^2 \,|\, m \text{ と } n \text{ は整数}\}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 7 は A の要素であることを証明せよ．
(2) 6 は A の要素ではないことを証明せよ．
(3) 奇数全体の集合は A の部分集合であることを証明せよ．
(4) 偶数 a が A の要素であるための必要十分条件は，ある整数 k を用いて $a = 4k$ とかけることであることを証明せよ．

(23 高知大 医・理工 2)

【答】
(1) 略
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

$$A = \{m^2 - n^2 \,|\, m \text{ と } n \text{ は整数}\}$$

(1) $$7 = 7 \cdot 1 = (4+3)(4-3) = 4^2 - 3^2$$
であるから，7 は A の要素である． …… (証明終わり)

(2) 背理法を用いる．
6 は A の要素であると仮定すると，$6 = m^2 - n^2$ を満たす整数 m, n が存在する．

$$6 = (m+n)(m-n)$$

$(m+n)+(m-n) = 2m$ であるから，$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致する．6 は偶数であるから，$m+n$ と $m-n$ はともに偶数であり，$(m+n)(m-n)$ は 4 の倍数となる．6 は 4 の倍数となり，これは不合理である．
よって， 6 は A の要素ではない． …… (証明終わり)

(3) 奇数は整数 k を用いて $2k+1$ と表すことができる．この $2k+1$ について

$$\begin{aligned} 2k+1 &= (2k+1)\cdot 1 \\ &= \{(k+1)+k\}\{(k+1)-k\} \\ &= (k+1)^2 - k^2 \end{aligned}$$

であるから，$2k+1$ は A の要素である．
よって，奇数全体の集合は A の部分集合である． …… (証明終わり)

(4) 偶数 a が A の要素であるとき

$$a = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$$

を満たす整数 m, n が存在する．a は偶数であり，$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致する ($\because$ (2)) ことから，$m+n$ と $m-n$ はともに偶数である．よって，偶数 a は 4 の倍数であり，ある整数 k を用いて $a = 4k$ とかける．
逆に，偶数 a が整数 k を用いて $a = 4k$ とかけるとき

$$a = 4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$$

より，a は A の要素である．
以上より，偶数 a が A の要素であるための必要十分条件はある整数 k を用いて $a = 4k$ とかけることである． …… (証明終わり)