a を正の実数として，複素数 $1+ai$ の偏角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．このとき，複素数 $a+i$ の偏角を θ で表せ．さらに，$(1+ai)^6+(a+i)^6$ の実部を求めよ．

(23 三重大 医・工 1(5))

【答】 $\arg(a+i)=\dfrac{\pi}{2}-\theta+2n\pi$ (n は整数)，$(1+ai)^6+(a+i)^6$ の実部は 0

【解答】

$\alpha=1+ai$，$\beta=a+i$ とおくと

$$\beta=i\left(1+\frac{a}{i}\right)=i(1-ai)=i\overline{\alpha}$$

である．α の偏角は θ，i の偏角は $\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\arg\beta&=\arg(i\overline{z})=\arg i+\arg\overline{z}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\quad(n\text{ は整数})}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

さらに，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta+2n\pi$ とおくと

$$\begin{aligned}\alpha^6+\beta^6&=\{\sqrt{1+a^2}(\cos\theta+i\sin\theta)\}^6+\{\sqrt{a^2+1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}^6\\&=(1+a^2)^3\{(\cos6\theta+i\sin6\theta)+(\cos6\varphi+i\sin6\varphi)\}\\&=(1+a^2)^3\{(\cos6\theta+\cos6\varphi)+i(\sin6\theta+\sin6\varphi)\}\end{aligned}$$

であるから，$\alpha^6+\beta^6$ の実部は

$$\begin{aligned}&(1+a^2)^3(\cos6\theta+\cos6\varphi)\\=&(1+a^2)^3\left\{\cos6\theta+\cos\left(3\pi-6\theta+12n\pi\right)\right\}\\=&(1+a^2)^3(\cos6\theta-\cos6\theta)\\=&\boldsymbol{0}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

- $\beta=i\overline{\alpha}$ なので

$$\begin{aligned}\alpha^6+\beta^6&=\alpha^6+(i\overline{\alpha})^6\\&=\alpha^6-(\overline{\alpha})^6\\&=\alpha^6-\overline{\alpha^6}\\&=(\text{純虚数})\end{aligned}$$

であり，$(1+ai)^6+(a+i)^6$ の実部は 0 である．