複素数 z は実部も虚部も負であり，$z^2=-2+2\sqrt{3}i$ を満たすものとする．偏角を 0 以上 2π 未満として，z^2, z を極形式で表せ．

(23 三重大 後 工 1(5))

【答】 $z^2=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $z=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

【解答】

$$|z^2|=|-2+2\sqrt{3}i|=2\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=4$$

偏角を 0 以上 2π 未満として，$z^2=-2+2\sqrt{3}i$ を極形式で表すと

$$\begin{aligned} z^2&=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &=\boldsymbol{4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．次に，$|z|=2$ であり，z は実部も虚部も負であるから

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)\ (\pi<\theta<2\pi)$$

とおくことができる．このとき，① は

$$2^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

であり

$$\begin{aligned} 2\theta&=\frac{2\pi}{3}+2n\pi\ (n \text{ は整数})\\ \therefore\quad \theta&=\frac{\pi}{3}+n\pi \end{aligned}$$

$\pi<\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$$

である．よって

$$\boldsymbol{z=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．