$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ の解のうち実部が負で虚部が正のものを求めよ．ただし，i は虚数単位である．$\boxed{\text{チ}}$

(23 会津大 コンピュータ理工 1(6))

【答】

チ
$z = -1 + \sqrt{3}i$

【解答】

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i \qquad \cdots\cdots ①$$

z を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおく．また

$$-8 + 8\sqrt{3}i = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

であるから

$$① \iff r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\iff \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi \ (n \text{ は整数}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

であり，このうち ① の解のうち実部が負で虚部が正であるのは

$$n = 1 \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

のときであり，求める解 z は

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \boldsymbol{-1 + \sqrt{3}i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．