定数 p を 3 以上の奇数，i を虚数単位とし，$\alpha=\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ とする．また，複素数 z に対して $f(z)=\frac{1}{z+1}$ とし，複素数 z の偏角 $\arg z$ を $0\leqq\arg z<2\pi$ の範囲で考える．n を p 以下の自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) α^n の実部および虚部を，p と n を用いてそれぞれ表せ．
(2) $f(\alpha^n)$ は実部 $\frac{1}{2}$ の複素数であることを示せ．
(3) $\tan(\arg f(\alpha^n))$ の最大値とそのときの n を，p を用いてそれぞれ表せ．

【答】

(1) α^n の実部は $\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$，虚部は $\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$
(2) 略
(3) $n=\frac{p+1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2p}\right)}$

【解答】

(1) ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\alpha^n&=\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)\right\}^n\\&=\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)\end{aligned}$$

であり，α^n の

実部は $\boldsymbol{\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}$，　虚部は $\boldsymbol{\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}$ ……(答)

である．

(2) $f(z)=\frac{1}{z+1}$ であるから

$$\begin{aligned}f(\alpha^n)&=\frac{1}{\alpha^n+1}=\frac{1}{\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)+1}\\&=\frac{1+\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)-i\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}{\left\{1+\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)\right\}^2+\sin^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}\\&=\frac{1+\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)-i\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}{\left\{1+2\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right)\right\}+\sin^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}\\&=\frac{1+\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)-i\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}{2+2\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}\\&=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}{1+\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)}\end{aligned}$$

よって，$f(\alpha^n)$ は実部 $\frac{1}{2}$ の複素数である． …… (証明終わり)

(3) $\theta = \dfrac{n\pi}{p}$ とおき，$f(\alpha^n)$ をさらに変形する．

$$\begin{aligned} f(\alpha^n) &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} \quad (\because\ 2\text{ 倍角の公式，半角の公式}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{1}{2\cos\theta}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} \end{aligned}$$

したがって

$$\tan(\arg f(\alpha^n)) = \tan(-\theta) = \tan\left(-\frac{n\pi}{p}\right)$$

n は $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$ であり

$$-\pi < -\frac{(p-1)\pi}{p} < \cdots < -\frac{2\pi}{p} < -\frac{\pi}{p} < 0$$

である．$\tan\left(-\dfrac{n\pi}{p}\right)$ が最大となるのは，n が

$$-\frac{n\pi}{p} < -\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad n > \frac{p}{2}$$

を満たす最小な整数のときであり，p は奇数であるから

$$\boldsymbol{n = \frac{p+1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときである．よって，$\tan(\arg f(\alpha^n))$ の最大値は

$$\begin{aligned} \tan\left\{-\frac{(p+1)\pi}{2p}\right\} &= -\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2p}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2p}\right)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．