次の問いに答えよ．

(1) 複素数平面上で，方程式 $\sqrt{7}|z-1|=|z+1|$ を満たす複素数 z 全体が表す図形を求めよ．

(2) $|z|=r$ と $\sqrt{7}|z-1|=|z+1|$ を同時に満たす複素数 z が 2 つ存在するような，正定数 r の値の範囲を求めよ．

(3) 複素数平面上で，(2) の 2 つの複素数の表す 2 点と原点 O を頂点とする三角形が正三角形であるとき，r の値を求めよ．

(23 公立小松大 3)

【答】

(1) 中心 $\dfrac{4}{3}$，半径 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ の円

(2) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}<r<\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$

(3) $r=\sqrt{3},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

【解答】

(1) $$\sqrt{7}|z-1|=|z+1| \iff 7|z-1|^2=|z+1|^2$$

式を変形すると

$$7(z-1)(\overline{z}-1)=(z+1)(\overline{z}+1)$$
$$7(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)=z\overline{z}+z+\overline{z}+1$$
$$6z\overline{z}-8z-8\overline{z}+6=0$$
$$z\overline{z}-\frac{4}{3}z-\frac{4}{3}\overline{z}+1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\therefore\ \left|z-\frac{4}{3}\right|^2=\frac{16}{9}-1$$
$$\therefore\ \left|z-\frac{4}{3}\right|=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

となる．よって，方程式 $\sqrt{7}|z-1|=|z+1|$ を満たす複素数 z 全体が表す図形は

中心 $\dfrac{4}{3}$，半径 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ の円 ……(答)

である．

(2) 円 $|z|=r$ …… ② と (1) の円 ① が 2 つの共有点をもつ条件は

(半径の差) < (中心間の距離) < (半径の和)

であるから

$$\left|r-\frac{\sqrt{7}}{3}\right|<\frac{4}{3}-0<r+\frac{\sqrt{7}}{3}$$
$$\therefore\ \begin{cases}-\dfrac{4}{3}<r-\dfrac{\sqrt{7}}{3}<\dfrac{4}{3}\\[2mm] \dfrac{4}{3}<r+\dfrac{\sqrt{7}}{3}\end{cases}$$
$$\therefore\ \begin{cases}\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}<r<\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\\[2mm] \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}<r\end{cases}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{4-\sqrt{7}}{3}<r<\frac{4+\sqrt{7}}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 2 つの円 ①, ② の中心はどちらも実軸上にあるから，2 つの共有点は実軸に関して対称の位置にある．共有点の一方を表す複素数を α とおくと，他方は $\overline{\alpha}$ である．

$\triangle 0\alpha\overline{\alpha}$ が正三角形であり，O(0) は円 ② の中心であるから

$$\alpha = r\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

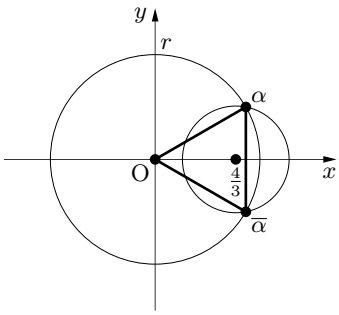
ととることができる．α は ① 上の点でもあるから

$$\alpha\overline{\alpha} - \frac{4}{3}\alpha - \frac{4}{3}\overline{\alpha} + 1 = 0$$

$$r^2 - \frac{4}{3}\cdot 2r\cos\frac{\pi}{6} + 1 = 0$$

$$r^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}r + 1 = 0$$

$$\left(r - \sqrt{3}\right)\left(r - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r = \sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}}$$ ……(答)

である．