実数 $a$, $b$ と虚数単位 $i$ を用いて複素数 $z$ が $z=a+bi$ の形で表されるとき，$a$ を $z$ の実部，$b$ を $z$ の虚部とよび，それぞれ $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$ と表す．

(1) $z^3=i$ を満たす複素数をすべて求めよ．

(2) $z^{100}=i$ を満たす複素数 $z$ のうち，$\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ．

(3) $n$ を正の整数とする．$z^n=i$ を満たす複素数 $z$ のうち，$\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を $N$ とする．$N > \dfrac{n}{3}$ となるための $n$ に関する必要十分条件を求めよ．

(23 千葉大 8)

---

【答】

(1) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -i$

(2) 33

(3) $n$ は 3 で割った余りが 2 となる自然数である

---

【解答】

(1) 複素数 $z$ は

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と表すことができる．

$$z^3=i \iff r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \quad (\because\ \text{ド・モアブルの定理})$$

$$\iff \begin{cases} r^3=1 \\ 3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\ \text{は整数}) \end{cases}$$

であり，$r \geqq 0$, $0 \leqq 3\theta < 6\pi$ であるから

$$r=1, \quad \theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$

である．よって，求める複素数のすべては

$$\boldsymbol{z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) と同じく

$$z^{100}=i \iff r^{100}(\cos 100\theta+i\sin 100\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\iff \begin{cases} r^{100}=1 \\ 100\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\ \text{は整数}) \end{cases}$$

であり，$r \geqq 0$, $0 \leqq 100\theta < 200\pi$ であるから

$$r=1, \quad \theta=\frac{\pi}{200}+\frac{k}{50}\pi$$

である．このうち $\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものは $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$ であるから

$$\frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{200}+\frac{k}{50}\pi \leqq \pi \qquad \therefore\ \frac{200}{3} \leqq 1+4k \leqq 200$$

$$\therefore\ \frac{197}{12} \leqq k \leqq \frac{199}{4} \qquad \therefore\ 16+\frac{5}{12} \leqq k \leqq 49+\frac{3}{4}$$

であり，条件を満たす複素数 $z$ の個数は

$$49-16=\boldsymbol{33}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1) と同じく

$$z^n = i \iff r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \text{ は整数}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad r = 1 \quad (\because\ r \geqq 0), \quad \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{2k}{n}\pi$$

である．$\theta$ の範囲は $-\pi \leqq \theta < \pi$ ととることができる ((1)，(2) の範囲とは変えた)．このとき $\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすものは $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{2n} + \frac{2k}{n}\pi \leqq \frac{\pi}{3} \qquad \therefore \quad -\frac{2n}{3} \leqq 1 + 4k \leqq \frac{2n}{3}$$

$$\therefore \quad -\frac{n}{6} - \frac{1}{4} \leqq k \leqq \frac{n}{6} - \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ①$$

$n = 6l + r$ ($l$ は整数，$r = 0,\ 1,\ \cdots,\ 5$) として $n$ を分類して，① を満たす整数 $k$ の個数 $N$ を求める．

(i) $r = 0$ ($n = 6l$) のとき

① は $-l - \dfrac{1}{4} \leqq k \leqq l - \dfrac{1}{4}$ であり，整数 $k$ は $k = -l,\ \cdots,\ l-1$ である．

$$N = l + 1 + (l-1) = 2l = \frac{n}{3} \qquad N > \frac{n}{3} \text{ を満たさない．}$$

(ii) $r = 1$ ($n = 6l+1$) のとき

① は $-l - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} \leqq k \leqq l + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4}$ であり，整数 $k$ は $k = -l,\ \cdots,\ l-1$ である．

$$N = l + 1 + (l-1) = 2l = \frac{n-1}{3} \qquad N > \frac{n}{3} \text{ を満たさない．}$$

(iii) $r = 2$ ($n = 6l+2$) のとき

① は $-l - \dfrac{2}{6} - \dfrac{1}{4} \leqq k \leqq l + \dfrac{2}{6} - \dfrac{1}{4}$ であり，整数 $k$ は $k = -l,\ \cdots,\ l$ である．

$$N = l + 1 + l = 2l + 1 = \frac{n-2}{3} + 1 = \frac{n+1}{3} \qquad N > \frac{n}{3} \text{ を満たす．}$$

(iv) $r = 3$ ($n = 6l+3$) のとき

① は $-l - \dfrac{3}{6} - \dfrac{1}{4} \leqq k \leqq l + \dfrac{3}{6} - \dfrac{1}{4}$ であり，整数 $k$ は $k = -l,\ \cdots,\ l$ である．

$$N = l + 1 + l = 2l + 1 = \frac{n-3}{3} + 1 = \frac{n}{3} \qquad N > \frac{n}{3} \text{ を満たさない．}$$

(v) $r = 4$ ($n = 6l+4$) のとき

① は $-l - \dfrac{4}{6} - \dfrac{1}{4} \leqq k \leqq l + \dfrac{4}{6} - \dfrac{1}{4}$ であり，整数 $k$ は $k = -l,\ \cdots,\ l$ である．

$$N = l + 1 + l = 2l + 1 = \frac{n-4}{3} + 1 = \frac{n-1}{3} \qquad N > \frac{n}{3} \text{ を満たさない．}$$

(vi) $r = 5$ ($n = 6l+5$) のとき

① は $-l - \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{4} \leqq k \leqq l + \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{4}$ であり，整数 $k$ は $k = -l-1,\ \cdots,\ l$ である．

$$N = (l+1) + 1 + l = 2l + 2 = \frac{n-5}{3} + 2 = \frac{n+1}{3} \qquad N > \frac{n}{3} \text{ を満たす．}$$

以上 (i)〜(vi) より，$N > \dfrac{n}{3}$ を満たす $r$ についての必要十分条件は

$$r = 2,\ 5$$

である．これを $n$ で表すと

$$n = 6l + 2,\ 6l + 5$$
$$= 3 \cdot 2l + 2,\ 3(2l+1) + 2$$

となり

**$n$ は 3 で割った余りが 2 となる自然数である** ……(答)

ということである．