正の実数 k と虚数単位 i に対し $\alpha = ki$ と定め，$\beta = \dfrac{1}{\alpha - 1}$，$\gamma = 2\alpha - 3$ として，複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ をとる．また，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ となるときの k の値を k_0 とする．次の問いに答えよ．

(1) β の実部と虚部をそれぞれ k で表せ．
(2) k_0 の値を求めよ．
(3) $k = k_0$ のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めよ．
(4) $k = k_0$ のとき，点 A と直線 BC の距離 d を求めよ．
(5) $k = k_0$ のとき，$\theta = \arg(\beta^{2023})$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする．θ の値を求めよ．

(23 宇都宮大 地デ・工・農 2)

【答】

(1) $\mathrm{Re}(\beta) = \dfrac{-1}{k^2+1}$，　$\mathrm{Im}(\beta) = \dfrac{-k}{k^2+1}$
(2) $k_0 = 1$
(3) $S = \dfrac{5}{2}$
(4) $d = \sqrt{2}$
(5) $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

【解答】

(1) $\alpha = ki$ (k は実数) であるから

$$\beta = \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{-1+ki} = \frac{-1-ki}{(-1+ki)(-1-ki)} = \frac{-1-ki}{1+k^2}$$

である．よって

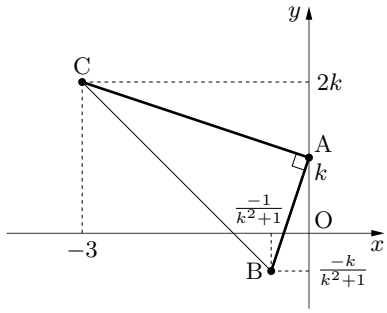
$$\boldsymbol{\mathrm{Re}(\beta) = \frac{-1}{k^2+1}, \quad \mathrm{Im}(\beta) = \frac{-k}{k^2+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ は

$$\alpha = ki,$$
$$\beta = \frac{-1}{k^2+1} + \frac{-k}{k^2+1}i,$$
$$\gamma = 2\alpha - 3 = -3 + 2ki$$

であり，$k > 0$ より右図のような位置にある．



$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ である条件は $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数となることである．

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{(-3+2ki)-ki}{\left(\dfrac{-1}{k^2+1} + \dfrac{-k}{k^2+1}i\right) - ki} \\
&= \frac{(k^2+1)(-3+ki)}{(-1-ki)-k(k^2+1)i} = \frac{(k^2+1)(3-ki)}{1+(k^3+2k)i} \\
&= (k^2+1)\cdot\frac{3-ki}{1+(k^3+2k)i}\cdot\frac{1-(k^3+2k)i}{1-(k^3+2k)i} \\
&= (k^2+1)\cdot\frac{3-k(k^3+2k)-\{3(k^3+2k)+k\}i}{1^2+(k^3+2k)^2}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数となるのは，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の実部が 0 となるときでであり，k は実数より $k^2+1 \neq 0$ なので

$$3-k(k^3+2k)=0$$
$$-k^4-2k^2+3=0$$
$$(k^2+3)(k^2-1)=0$$

$k>0$ であるから $k=1$ である．よって

$$\boldsymbol{k_0=1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を点 A のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させると $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行になると考えると，実数 t を用いて

$$\beta-\alpha=t(\gamma-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ．

$$\left(\frac{-1}{k^2+1}+\frac{-k}{k^2+1}i\right)-ki=t\{(-3+2ki)-ki\}i$$
$$\frac{-1}{k^2+1}+\frac{-k-k(k^2+1)}{k^2+1}i=t(-k-3i)$$
$$\therefore \quad \begin{cases} \dfrac{-1}{k^2+1}=-tk \\ \dfrac{-k^3-2k}{k^2+1}=-3t \end{cases}$$
$$\therefore \quad \frac{-3}{k^2+1}=\frac{k(-k^3-2k)}{k^2+1}$$
$$\therefore \quad 3=k(k^3+2k)$$
$$k^4+2k^2-3=0$$
$$(k^2+3)(k^2-1)=0$$

$k>0$ より，$k=1$ であるから，$k_0=1$ である．

- 同じことだが，ベクトルの内積を考えると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{-1}{k^2+1},\ \dfrac{-k(k^2+2)}{k^2+1}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,\ k)$ より

$$\frac{-1}{k^2+1}\times(-3)-\frac{k(k^2+2)}{k^2+1}\times k=0$$
$$\therefore \quad -3+k^2(k^2+2)=0$$

以下，上と同じである．

(3) $k=1$ のとき，$\mathrm{A}(i)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$，$\mathrm{C}(-3+2i)$ である．

$$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$\mathrm{AC}=|\gamma-\alpha|=|-3+i|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$$

である．$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから，面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\sqrt{10}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $k=1$ のとき

$$\mathrm{BC}=|\gamma-\beta|=\left|-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i\right|=\frac{5}{2}|-1+i|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

である．$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\times d=S$ より

$$d=\frac{2S}{\mathrm{BC}}=2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．

(5) $k=1$ のとき

$$\beta=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

であり，$\arg\beta=\dfrac{5}{4}\pi$ である．

$$\begin{aligned}\theta&=\arg(\beta^{2023})=2023\arg\beta=2023\cdot\frac{5}{4}\pi\\&=\left(2023+\frac{2023}{4}\right)\pi=\left(2528+\frac{3}{4}\right)\pi=\left(1264\cdot2+\frac{3}{4}\right)\pi\end{aligned}$$

である．$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\boldsymbol{\theta=\frac{3}{4}\pi}$$ ……(答)

である．