i を虚数単位とする．方程式 $z^3=8i$ の解で，実部が正の複素数を α，実部が負の複素数を β，実部が 0 の複素数を γ とする．

(1) α, β, γ を求めよ．

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ と $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|$ の値を求めよ．

(3) 複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする $\triangle$ABC が，正三角形であることを示せ．

(23 室蘭工大 4)

【答】

(1) $\alpha=\sqrt{3}+i,\ \beta=-\sqrt{3}+i,\ \gamma=-2i$

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$

(3) 略

【解答】

(1) 方程式 $z^3=8i$ の解 z を極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ で表すと

$$z^3=8i$$

$$r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r^3\{\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)\}=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\quad(\because\ \text{ド・モアブルの定理})$$

辺々の絶対値，偏角を比較すると

$$\begin{cases} r^3=8 \\ 3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\ \text{は整数}) \end{cases}$$

$$\therefore\quad r=2\ (>0),\quad \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3}$$

よって

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ 2\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$=\sqrt{3}+i,\ \ -\sqrt{3}+i,\ \ -2i$$

α, β, γ はそれぞれ実部が正，負，0 の複素数であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\sqrt{3}+i,\ \beta=-\sqrt{3}+i,\ \gamma=-2i}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{-2i-(\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}+i)}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\boldsymbol{1}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\qquad\therefore\quad\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1\qquad\therefore\quad\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$$

よって，$\triangle$ABC は正三角形である． …… (証明終わり)