次の問いに答えよ．

(1) 複素数 $z,\ w$ に対して，不等式

$$|z+w| \leqq |z|+|w|$$

が成り立つことを示せ．

(2) 複素数平面上で，原点を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ がある．ただし，$\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ とする．

(a) 等式

$$\left|\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right| = 1$$

が成り立つことを示せ．

(b) 不等式

$$|\alpha(\beta+1)+\beta(\gamma+1)+\gamma(\alpha+1)| \leqq 2|\alpha+\beta+\gamma|$$

が成り立つことを示せ．

(23 富山大 後 理 (数) 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) $z=a+bi,\ w=c+di$ ($a,\ b,\ c,\ d$ は実数, i は虚数単位) とおく．

$$\begin{aligned}
&(|z|+|w|)^2-|z+w|^2\\
&=\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2-\left\{(a+c)^2+(b+d)^2\right\}\\
&=\left(a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\right)-\left\{a^2+c^2+b^2+d^2+2(ac+bd)\right\}\\
&=2\left\{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}-(ac+bd)\right\}\\
&\geqq 0 \quad (\because\ \text{コーシー・シュワルツの不等式})
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，不等式

$$|z+w| \leqq |z|+|w|$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

- (平方和の積) と (積の和の平方) についての不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqq (ac+bd)^2$$

は，コーシー・シュワルツの不等式と呼ばれている．

$\vec{a}=(a,\ b),\ \vec{c}=(c,\ d)$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を α すると内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

であり，$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$ であるから，不等式

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$$

が得られる．成分で表すと

$$ac+bd \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

$$\therefore\quad (ac+bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

が成り立つ．等号が成立するのは

$$\vec{a}=\vec{0} \text{ または } \vec{c}=\vec{0} \text{ または } \vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$$

すなわち

$$a=b=0 \text{ または } c=d=0 \text{ または } a:b=c:d$$

のときである．

- これは次のように示すこともできる．

$$|zw|=|z||w|$$

$z=a+bi,\ w=c+di$ ($a,\ b,\ c,\ d$ は実数，i は虚数単位) として，辺々2 乗すると

$$|(a+bi)(c+di)|^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

ここで，左辺は

$$(\text{左辺})=|(ac-bd)+(ad+bc)i|^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

であるから

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

が成り立つ．この等式をブラーマグプタの恒等式という．この等式により

$$(ad+bc)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

が成り立ち，等号が成立するのは $ac-bd=0$ が成り立つときとわかる．

(2) (a) $I=\left|\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right|$ とおく．条件より $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ であるから

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overline{\left(\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)}\\
&= \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\overline{\alpha}\overline{\beta}+\overline{\beta}\overline{\gamma}+\overline{\gamma}\,\overline{\alpha})}{(\alpha+\beta+\gamma)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})}\\
&= \frac{(1+\alpha\overline{\gamma}+\beta\overline{\gamma})+(\gamma\overline{\alpha}+1+\beta\overline{\alpha})+(\gamma\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+1)}{(1+\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma})+(\beta\overline{\alpha}+1+\beta\overline{\gamma})+(\gamma\overline{\alpha}+\gamma\overline{\beta}+1)}\\
&= \frac{3+\alpha(\overline{\beta}+\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}+\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}{3+\alpha(\overline{\beta}+\overline{\gamma})+\beta(\gamma+\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$I \geqq 0$ より，$I=1$ すなわち

$$\left|\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right|=1 \qquad \cdots\cdots (\text{証明終わり})$$

である．

(b) (a) の利用を考えて左辺を変形すると

$$\begin{aligned}
&|\alpha(\beta+1)+\beta(\gamma+1)+\gamma(\alpha+1)|\\
&=|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma|\\
&\leqq |\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha|+|\alpha+\beta+\gamma| \quad (\because\ (1))\\
&=|\alpha+\beta+\gamma|+|\alpha+\beta+\gamma| \quad (\because\ (2))\\
&=2|\alpha+\beta+\gamma|
\end{aligned}$$

よって，$|\alpha(\beta+1)+\beta(\gamma+1)+\gamma(\alpha+1)| \leqq 2|\alpha+\beta+\gamma|$ が成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)