複素数平面上で，$|z+1+i|+|z-1-i|=6$ を満たす点 z の全体を C とする．このとき，C によって囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{シ}}$ である．

(23 山梨大 後 医 2(2))

【答】

シ
$3\sqrt{7}\pi$

【解答】

$$|z+1+i|+|z-1-i|=6 \qquad \cdots\cdots (*)$$

複素数平面において，A$(-1-i)$，B$(1+i)$，P(z) とおくと

$$\begin{aligned}(*) &\iff |z-(-1-i)|+|z-(1+i)|=6\\ &\iff \mathrm{AP}+\mathrm{BP}=6\end{aligned}$$

であり，$(*)$ を満たす点 P の全体 C は，2 点 A，B を焦点とし，長軸の長さが 6 の楕円である．

短軸の長さを $2d$ とおくと，中心 (原点 O) から焦点 B までの距離が $\mathrm{OB}=\sqrt{2}$ であるから

$$d=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$$

であり，求める面積は

$$\pi\cdot 3\cdot\sqrt{7}=\boldsymbol{3\sqrt{7}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

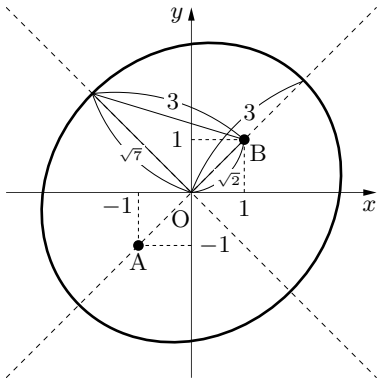
- 楕円 C を図示すると右図となる．
- 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ によって囲まれた図形の面積は

  $$\pi ab$$

  である．確認しておく．

  $$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

  楕円の対称性より，面積 S は

  $$\begin{aligned}S&=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\\ &=4\times\frac{b}{a}\cdot(\text{半径 } a \text{ の面積の四分の 1})\\ &=4\times\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}\\ &=\pi ab\end{aligned}$$

  である．