自然数 n に対して，複素数 z_n を

$$z_n = (1+\sqrt{3}i)^n$$

と定める．ただし，i は虚数単位とする．次の問いに答えよ．

(1) z_8 の虚部を求めよ．

(2) 不等式

$$|z_n| > |z_n - 2\cdot 10^{10} i|$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．必要があれば，$3.3 < \log_2 10 < 3.4$ であることを用いてよい．

(23 弘前大 教育・医・理工 6)

【答】

(1) $128\sqrt{3}$
(2) 37

【解答】

$$\begin{aligned} z_n &= (1+\sqrt{3}i)^n \\ &= \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n \\ &= 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \qquad \cdots\cdots ① \quad (\because \text{ ド・モアブルの定理}) \end{aligned}$$

(1) ① より，z_8 の虚部は

$$2^8 \sin\frac{8\pi}{3} = 2^8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{128\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) O(0)，A$(2\cdot 10^{10} i)$ とおくと，不等式

$$|z_n| > |z_n - 2\cdot 10^{10} i|$$

が表す領域は，線分 OA の垂直二等分線の A 側の部分である．これは z_n の虚部を y_n とおくと

$$y_n > 10^{10} \qquad \cdots\cdots ②$$

の部分である．$|z_n| = 2^n$ から

$$2^n > 10^{10} \qquad \therefore \quad n > 10\log_2 10$$

が必要で，$3.3 < \log_2 10 < 3.4$ より

$$33 < 10\log_2 10 < 34$$

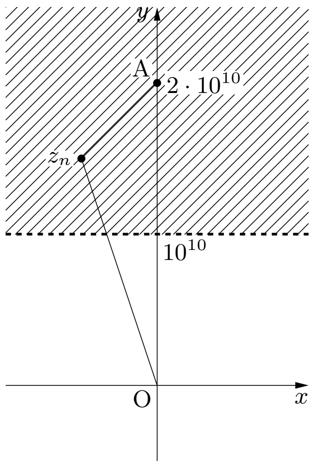
であるから，$n \geqq 34$ で考える．さらに，① から虚部が正となるのは

$$\sin\frac{n\pi}{3} > 0$$

$$\therefore \quad 2k\pi < \frac{n\pi}{3} < 2k\pi + \pi \ (k \text{ は整数})$$

$$\therefore \quad 6k < n < 6k+3$$

$$\therefore \quad n = 6k+1,\ 6k+2$$



のときだから，$n=37,\ 38,\ 43,\ \cdots$ と代入し，②を満たす最小の n を求める．
$n=37$ のとき

$$y_{37}=2^{37}\sin\frac{37\pi}{3}=2^{37}\sin\frac{\pi}{3}=2^{36}\sqrt{3}$$

ここで，$2^{10}=1024>10^3$ であるから

$$10^{10}=10^{9+1}=10\cdot(10^3)^3<16\cdot(2^{10})^3=2^{34}$$

が成り立ち

$$y_{37}=2^{36}\sqrt{3}>2^{34}>10^{10}$$

であるから，② を満たす最小の自然数 n は

37 ……(答)

である．