以下の問いに答えよ.

(1) 条件

$$(z_1-\overline{z_1})\left(\frac{1}{\overline{z_1}}-\frac{1}{z_1}\right)=-\mathrm{Im}(z_1)\ \text{および}\ \mathrm{Im}(z_1)\neq 0$$

を満たす複素数平面上の点 z_1 はどのような図形を描くか. ただし, $\mathrm{Im}(z_1)$ は z_1 の虚部を表す.

(2) 複素数平面において, 原点を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円と (1) の点 z_1 が描く図形の共有点の偏角 θ を求めよ. ただし, 偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする.

(3) 条件

$$|z_2-1-ai|=|z_2-(1+a)i|$$

を満たす複素数平面上の点 z_2 が描く図形と (1) の点 z_1 が描く図形が共有点を持つように, 定数 a の値の範囲を定めよ. ただし, a は実数とし, i は虚数単位とする.

(23 愛知県立大 情報科学 4)

【答】

(1) 点 $2i$ を中心とする半径 2 の円から原点を除いた図形

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

(3) $2-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2+2\sqrt{2}$

【解答】

(1)
$$(z_1-\overline{z_1})\left(\frac{1}{\overline{z_1}}-\frac{1}{z_1}\right)=-\mathrm{Im}(z_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\mathrm{Im}(z_1)\neq 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$\mathrm{Im}(z_1)=\dfrac{z_1-\overline{z}_1}{2i}$ であるから

$$「① かつ ②」\iff \begin{cases}\dfrac{(z_1-\overline{z}_1)^2}{z_1\overline{z}_1}=-\dfrac{z_1-\overline{z}_1}{2i}\\ \dfrac{z_1-\overline{z}_1}{2i}\neq 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2i(z_1-\overline{z}_1)=-z_1\overline{z}_1\ \text{かつ}\ |z_1|\neq 0\\ z_1-\overline{z}_1\neq 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}z_1\overline{z}_1+2iz-2i\overline{z}_1=0\\ z_1-\overline{z}_1\neq 0\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}|z_1-2i|^2=4\\ z_1-\overline{z}_1\neq 0\end{cases}$$

点 z_1 は $|z_1-2i|=2$ から実軸上の点を除いた図形, すなわち

点 $2i$ を中心とする半径 2 の円から原点を除いた図形 ……(答)

を描く.

- $z_1 = x + yi$ とおくと，$z_1 - \overline{z}_1 = 2yi$，$\mathrm{Im}(z_1) = y$ であるから

$$「①\text{ かつ }②」\iff \begin{cases} \dfrac{(z_1-\overline{z}_1)^2}{z_1\overline{z}_1} = -\mathrm{Im}(z_1) \\ \mathrm{Im}(z_1) \fallingdotseq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{-4y^2}{x^2+y^2} = -y \\ y \fallingdotseq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4y = x^2+y^2 \text{ かつ } x^2+y^2 \fallingdotseq 0 \\ y \fallingdotseq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+(y-2)^2 = 4 \\ y \fallingdotseq 0 \end{cases}$$

よって，点 z_1 は点 $(0,\ 2)$ すなわち点 $2i$ を中心とする半径 2 の円から原点を除いた図形を描く．

(2) 原点を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円周上の点 z は

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおくことができる．$z \fallingdotseq 0$ より (1) の点 z_1 が描く図形との共有点では

$$|2\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) - 2i| = 2$$
$$\therefore\quad (2\sqrt{2}\cos\theta)^2 + (2\sqrt{2}\sin\theta - 2)^2 = 4$$

が成り立つ．式を整理すると

$$2\cos^2\theta + (\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 1$$
$$2(1-\sin^2\theta) + (2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1) = 1$$
$$\therefore\quad 2 - 2\sqrt{2}\sin\theta = 0 \qquad \therefore\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 原点を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円と (1) の円の共有点は

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 8 \\ x^2+y^2 = 4y \text{ かつ } (x,\ y) \fallingdotseq (0,\ 0) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 8 \\ 8 = 4y \end{cases}$$
$$\therefore\quad (x,\ y) = (\pm 2,\ 2)$$

偏角の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ として $x + yi$ を極形式で表すと

$$x + yi = \pm 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

であり，共有点の偏角 θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

である．

(3) $z_2 = x + yi$ とおくと，z_2 は

$$|z_2 - 1 - ai| = |z_2 - (1+a)i|$$

を満たすから

$$
\begin{aligned}
&|(x-1)+(y-a)i| = |x+(y-1-a)i| \\
&(x-1)^2+(y-a)^2 = x^2+(y-1-a)^2 \\
&(x^2-2x+1)+(y-a)^2 = x^2+(y-a)^2-2(y-a)+1 \\
&-2x = -2(y-a) \\
\therefore\quad & x-y+a=0 \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

この直線 ③ と (1) の図形が共有点をもつ条件は

(中心 $(0,\ 2)$ と直線③との距離) $\leqq$ (半径)

である．

$$
\begin{aligned}
&\frac{|0-2+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \leqq 2 \\
\therefore\quad & |a-2| \leqq 2\sqrt{2} \\
\therefore\quad & 2-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 2+2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

である．$a=0$ のとき直線 ③ は (1) の円の除外点 $(0,\ 0)$ を通るが，このとき直線 ③ は (1) の円と点 $(2,\ 2)$ を共有するので，$a=0$ も条件を満たす．

よって，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{2-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 2+2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 条件として与えられた直線は 2 点 $1+ai$ と $(1+a)i$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．