i は虚数単位とする．複素数平面上で，以下の (条件 1) を満たす点 z 全体の表す図形を Z，(条件 2) を満たす点 w 全体の表す図形を W とする．

(条件 1) z の実部を x とするとき，$|z-2-i|=\sqrt{5-2x}$ が成り立つ．
(条件 2) $|w-1-\sqrt{2}-i|=|w-2|$

図形 W と実軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 図形 Z はどのような図形か答えよ．
(2) α の値を求めよ．
(3) 図形 Z と図形 W の交点を複素数で表したとき，それらの複素数すべての和を β とする．β の値を求めよ．
(4) (3) で求めた複素数 β が表す点を B とする．点 B を，点 A を中心として $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を C とするとき，△ABC の重心を表す複素数を求めよ．

(23 東京農工大 農・工 1)

【答】

(1) 点 $1+i$ を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の円
(2) $\alpha=2+\sqrt{2}$
(3) $\beta=2+\sqrt{2}$
(4) $\dfrac{12+5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}+\dfrac{2-\sqrt{6}}{6}i$

【解答】

(1) z の虚部を y とおくと，$z=x+yi$ であるから，(条件 1) は

$$|z-2-i|=\sqrt{5-2x} \iff (x-2)^2+(y-1)^2=5-2x$$
$$\therefore\quad x^2-2x+y^2-2y=0$$
$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-1)^2=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

よって，図形 Z は **点 $\boldsymbol{1+i}$ を中心とした半径 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ の円** である． ……(答)

(2) (条件 2) を満たす図形 W は 2 点 $\mathrm{D}(1+\sqrt{2}+i)$，$\mathrm{E}(2)$ を結ぶ線分 DE の垂直二等分線である．この直線の方程式は

$$|w-1-\sqrt{2}-i|=|w-2| \iff |w-1-\sqrt{2}-i|^2=|w-2|^2$$
$$(w-1-\sqrt{2}-i)(\overline{w}-1-\sqrt{2}+i)=(w-2)(\overline{w}-2)$$
$$w\overline{w}-(1+\sqrt{2}-i)w-(1+\sqrt{2}+i)\overline{w}+(1+\sqrt{2})^2+1=w\overline{w}-2w-2\overline{w}+4$$
$$(1-\sqrt{2}+i)w+(1-\sqrt{2}-i)\overline{w}+2\sqrt{2}=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．$\mathrm{A}(\alpha)$ は図形 W と実軸の交点であるから，$\overline{\alpha}=\alpha$ である．α は ② を満たすから

$$(1-\sqrt{2}+i)\alpha+(1-\sqrt{2}-i)\alpha+2\sqrt{2}=0$$
$$2(1-\sqrt{2})\alpha+2\sqrt{2}=0$$
$$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．

(3) $w=x+yi$ (x, yは実数) とおき，② を整理すると

$$② \iff (1-\sqrt{2}+i)(x+yi)+(1-\sqrt{2}-i)(x-yi)+2\sqrt{2}=0$$
$$2(1-\sqrt{2})x+2i\cdot yi+2\sqrt{2}=0$$
$$(1-\sqrt{2})x-y+\sqrt{2}=0 \qquad \cdots\cdots ②'$$

図形 Z と図形 W の交点は，円 ① と直線 ②$'$ の交点であるから，2 式を連立すると

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2+\{(1-\sqrt{2})x+\sqrt{2}-1\}^2=2\\
&(x-1)^2+(1-\sqrt{2})^2(x-1)^2=2\\
&(4-2\sqrt{2})(x-1)^2=2\\
&(x-1)^2=\frac{1}{2-\sqrt{2}}\\
&x^2-2x+1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\\
\therefore\quad &x^2-2x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\text{判別式}}{4}=(-1)^2-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$ より ③ は異なる実数解をもつ．③ の解を $p,\ q$ とおくと，Z と W の交点は

$$p+\{(1-\sqrt{2})p+\sqrt{2}\}i,\quad q+\{(1-\sqrt{2})q+\sqrt{2}\}i$$

である．β はこの和であるから

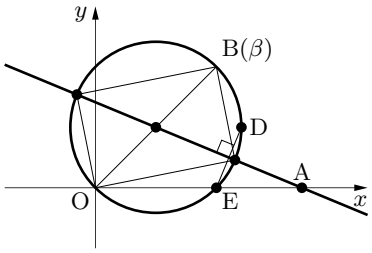
$$
\begin{aligned}
\beta&=(p+q)+\{(1-\sqrt{2})(p+q)+2\sqrt{2}\}i\\
&=2+\{(1-\sqrt{2})\cdot 2+2\sqrt{2}\}i \quad (\because\ \text{解と係数の関係})\\
&=\boldsymbol{2+2i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

- 2 点 D，E は円 Z 上にあるから，線分 DE の垂直二等分線 W は円 Z の中心を通る．円 Z と直線 W は交点を 2 つもち，それらを結ぶ線分の中点は円 Z の中心 $1+i$ である．
  2 交点を表す複素数を $z_1,\ z_2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\beta&=z_1+z_2=2\cdot\frac{z_1+z_2}{2}\\
&=2(1+i)=2+2i
\end{aligned}
$$

  である．



(4) C を表す複素数を γ とおく．C は B を A を中心として $\dfrac{2}{3}\pi$ 回転した点であるから

$$
\begin{aligned}
\gamma-\alpha&=(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\
\therefore\quad \gamma&=2+\sqrt{2}+\{(2+2i)-(2+\sqrt{2})\}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&=2+\sqrt{2}+(-\sqrt{2}+2i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&=2+\sqrt{2}+\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}+\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)i\right\}\\
&=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}-\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)i
\end{aligned}
$$

よって，△ABC の重心を表す複素数は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=\frac{1}{3}\left\{(2+\sqrt{2})+(2+2i)+\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}-\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)i\right)\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{12+5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}+\frac{2-\sqrt{6}}{6}i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．