複素数平面上の点 0 と点 $1+i$ を通る直線を L とする．ただし，i は虚数単位である．複素数 a は 1 と異なり，かつ次の条件 $(*)$ を満たすとする．

$(*)$ 直線 L 上にあるすべての点 z に対して，$\left|\dfrac{z+a}{z+1}\right|=1$ が成り立つ．

以下の問いに答えよ．

(1) 複素数 a を求めよ．

(2) $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) を，-1 と異なる複素数とする．$x>y$ は $\left|\dfrac{z+a}{z+1}\right|<1$ であるための必要十分条件であることを示せ．

(23 東北大 後 理 5)

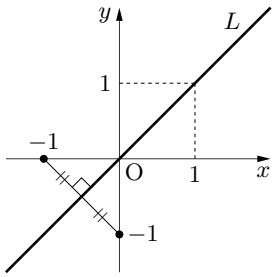
【答】

(1) $a=i$

(2) 略

【解答】

(1)
$$\left|\frac{z+a}{z+1}\right|=1 \iff \begin{cases}|z+a|=|z+1|\\ z+1\neq 0\end{cases}$$



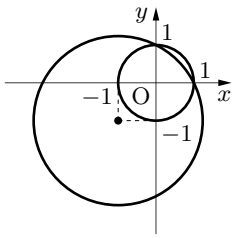
$a\neq 1$ より，$|z+a|=|z+1|$ を満たす点 z は異なる 2 点 $-a,\ -1$ を結ぶ線分の垂直二等分線上の点である．また，条件 $(*)$ より直線 L 上のすべての点はこの等式を満たすから，直線 L は 2 点 $-a,\ -1$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．

よって，$-a$ と -1 は直線 L に関して対称であるから

$$-a=-i \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a=i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 条件 $(*)$ より $0,\ 1+i$ は $\left|\dfrac{z+a}{z+1}\right|=1$ を満たす．



$$\begin{cases}\left|\dfrac{0+a}{0+1}\right|=1\\ \left|\dfrac{(1+i)+a}{(1+i)+1}\right|=1\end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases}|a|=1\\ |a+1+i|=\sqrt{5}\end{cases}$$

$a=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) とおくと，a は 2 円 $x^2+y^2=1$，$(x+1)^2+(y+1)^2=5$ の交点である．2 式を連立すると

$$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$$

である．$a\neq 1$ より $(x,\ y)\neq(1,\ 0)$ であり

$$(x,\ y)=(0,\ 1) \text{ すなわち } \quad a=i$$

である．

(2) $z\neq -1$ であるから

$$\left|\frac{z+i}{z+1}\right|<1 \iff |z+i|<|z+1|$$

$z = x + yi$ (x, y は実数) を代入し，辺々平方した式を同値変形すると

$$
\begin{aligned}
&|x + (y+1)i|^2 < |(x+1) + yi|^2 \\
&x^2 + (y+1)^2 < (x+1)^2 + y^2 \\
&x^2 + y^2 + 2y + 1 < x^2 + 2x + 1 + y^2 \\
\therefore\quad &y < x
\end{aligned}
$$

となるので，題意は示された． …… (証明終わり)