$\alpha$, $\beta$ を複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A($\alpha$)，B($\beta$) が三角形をなすとする．点 A を点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を P，点 O を点 B を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を Q，点 B を点 A を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を R とする．△POA, △QBO, △RAB の重心をそれぞれ G，H，I とする．以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 P，Q，R を表す複素数のそれぞれを $\alpha$, $\beta$ を用いて表せ．
(2) 3 点 G，H，I を表す複素数のそれぞれを $\alpha$, $\beta$ を用いて表せ．
(3) 3 点 G，H，I が三角形をなすとき，△GHI が正三角形かどうか判定せよ．

(23 熊本大 理・工・医 (技術)・薬 3)

---

【答】

(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\beta\right)$

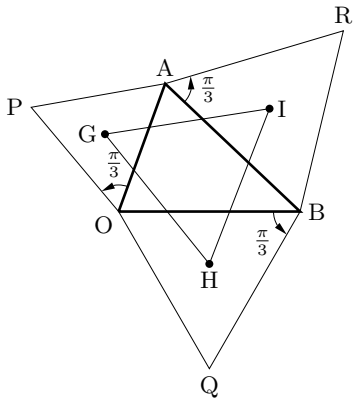
(2) $\mathrm{G}\left(\dfrac{3+\sqrt{3}i}{6}\alpha\right)$, $\mathrm{H}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}i}{6}\beta\right)$, $\mathrm{I}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}i}{6}\alpha+\dfrac{3+\sqrt{3}i}{6}\beta\right)$

(3) △GHI は正三角形である．

---

【解答】

(1) 3 点 P，Q，R を表す複素数をそれぞれ $p$, $q$, $r$ とおく．




P は点 A を点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点であるから

$$p=\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

Q は点 O を点 B を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点であるから

$$q-\beta=(0-\beta)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\beta$$
$$\therefore\quad q=\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

R は点 B を点 A を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点であるから

$$r-\alpha=(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=(\beta-\alpha)\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$\therefore\quad r=\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\beta} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 3 点 G，H，I を表す複素数をそれぞれ $g$, $h$, $j$ とおく．
G は △POA の重心であるから

$$g = \frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha + 0 + \alpha}{3} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}i}{6}\alpha} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．
H は △QBO の重心であるから

$$h = \frac{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta + \beta + 0}{3} = \boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\beta} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．
I は △RAB の重心であるから

$$\begin{aligned} j &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\beta\right) + \alpha + \beta\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\alpha + \frac{3+\sqrt{3}i}{6}\beta} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．
(3) 3 点 G，H，I が三角形をなすから，$g \neq h$ であり，(2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{j-g}{h-g} &= \frac{\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\alpha + \frac{3+\sqrt{3}i}{6}\beta\right) - \frac{3+\sqrt{3}i}{6}\alpha}{\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\beta - \frac{3+\sqrt{3}i}{6}\alpha} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+i)\beta - 2i\alpha}{(\sqrt{3}-i)\beta - (\sqrt{3}+i)\alpha} \qquad \left(\because \text{ 分母，分子を } \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ で割った}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\beta - \frac{2i}{\sqrt{3}+i}\alpha}{\beta - \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\alpha} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4} \cdot \frac{\beta - \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{4}\alpha}{\beta - \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4}\alpha} \\ &= \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} \cdot \frac{\beta - \frac{2+2\sqrt{3}i}{4}\alpha}{\beta - \frac{2+2\sqrt{3}i}{4}\alpha} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる．これより

$$\frac{|j-g|}{|h-g|} = 1 \text{ かつ } \arg\frac{j-g}{h-g} = \frac{\pi}{3}$$

すなわち

$$\mathrm{GI} = \mathrm{GH} \text{ かつ } \angle\mathrm{HGI} = \frac{\pi}{3}$$

であり，△GHI は正三角形である． ……(証明終わり)