$z=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}$ とするとき，次の値を求めなさい．ただし i は虚数単位とする．

$$z^4+3z^3+2z^2-z-2$$

(23 福島大 人間発達文化 2(2))

【答】 $\dfrac{-3+5\sqrt{7}i}{2}$

【解答】

$z=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}$ より，$2z+3=\sqrt{7}i$ であり，辺々を 2 乗すると

$$4z^2+12z+9=-7$$
$$\therefore\quad z^2+3z+4=0$$

が成り立つ．$z^4+3z^3+2z^2-z-2$ を z^2+3z+4 で割ると

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 \qquad\quad -2 \\ \hline
z^2+3z+4 & z^4+3z^3+2z^2 \quad -z-2 \\
 & z^4+3z^3+4z^2 \\ \hline
 & \qquad -2z^2 \quad -z-2 \\
 & \qquad -2z^2-6z-8 \\ \hline
 & \qquad\qquad 5z+6
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&z^4+3z^3+2z^2-z-2\\
&=(z^2+3z+4)(z^2-2)+5z+6\\
&=0+5\cdot\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}+6\\
&=\boldsymbol{\frac{-3+5\sqrt{7}i}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．