$z = 1 + \sqrt{3}\,i$ とする．このとき，

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$$

の値を求めなさい．

(23 福島大 共生システム理工 2(1))

【答】 $-21\sqrt{3}i$

【解答】

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$ は初項 1，公比 z $(\neq 1)$，項数 6 の等比数列の和なので

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = \frac{z^6 - 1}{z - 1}$$

である．z を極形式で表すと

$$z = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

なので，ド・モアブルの定理より

$$z^6 = 2^6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64$$

であり

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 &= \frac{64 - 1}{(1 + \sqrt{3}\,i) - 1} \\ &= \frac{63}{\sqrt{3}i} \\ &= \boldsymbol{-21\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

……(答)

である．