$n$ を自然数とする．$z$ を $0$ でない複素数とし，

$$S = z^{-2n} + z^{-2n+2} + z^{-2n+4} + \cdots + z^{-2} + 1 + z^2 + \cdots + z^{2n-4} + z^{2n-2} + z^{2n}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) $z^{-1}S - zS$ を計算せよ．

(2) $i$ を虚数単位とし，$\theta$ を実数とする．$z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき，自然数 $k$ に対して，$z^{-k} + z^k$ の実部と $z^{-k} - z^k$ の虚部を $\theta$ と $k$ を用いて表せ．

(3) $\theta$ を実数とし，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ とする．次の等式を証明せよ．

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

(23 茨城大 理 3)

---

【答】

(1) $z^{-1}S - zS = z^{-2n-1} - z^{2n+1}$

(2) $z^{-k} + z^k$ の実部は $2\cos k\theta$,　$z^{-k} - z^k$ の虚部は $-2\sin k\theta$

(3) 略

---

【解答】

$$S = z^{-2n} + z^{-2n+2} + z^{-2n+4} + \cdots + z^{-2} + 1 + z^2 + \cdots + z^{2n-4} + z^{2n-2} + z^{2n} \quad \cdots\cdots ①$$

(1) ① より

$$\begin{aligned}
&z^{-1}S - zS \\
&= (z^{-2n-1} + z^{-2n+1} + z^{-2n+3} + \cdots + z^{-3} + z^{-1} + z^1 + \cdots + z^{2n-5} + z^{2n-3} + z^{2n-1}) \\
&\quad - (z^{-2n+1} + z^{-2n+3} + z^{-2n+5} + \cdots + z^{-1} + z + z^3 + \cdots z^{2n-3} + z^{2n-1} + z^{2n+1}) \\
&= \boldsymbol{z^{-2n-1} - z^{2n+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき，ド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
z^{-k} + z^k &= \{\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta)\} + (\cos k\theta + i\sin k\theta) \\
&= (\cos k\theta - i\sin k\theta) + (\cos k\theta + i\sin k\theta) \\
&= 2\cos k\theta \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^{-k} - z^k &= \{\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta)\} - (\cos k\theta + i\sin k\theta) \\
&= (\cos k\theta - i\sin k\theta) - (\cos k\theta + i\sin k\theta) \\
&= -2i\sin k\theta \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{(z^{-k} + z^k \text{の実部}) = 2\cos k\theta}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\boldsymbol{(z^{-k} - z^k \text{の虚部}) = -2\sin k\theta} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) ① について和の順序を変えると

$$\begin{aligned}
S &= 1 + (z^{-2} + z^2) + \cdots + (z^{-2n+4} + z^{2n-4}) + (z^{-2n+2} + z^{2n-2}) + (z^{-2n} + z^{2n}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \{z^{-2k} + z^{2k}\} \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta \quad (\because\ ②\text{の } k \text{ を } 2k \text{ とした}) \qquad \cdots\cdots ④
\end{aligned}$$

である．また，(1) から

$$(z^{-1}-z)S = z^{-2n-1} - z^{2n+1}$$

③ において $k=1$ とすると，$z^{-1}-z=-2i\sin\theta$ であり，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{z^{-2n-1}-z^{2n+1}}{-2i\sin\theta} \\ &= \frac{-2i\sin(2n+1)\theta}{-2i\sin\theta} \quad (\because \text{③の } k \text{ を } 2n+1 \text{ とした}) \\ &= \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \qquad \cdots\cdots ⑤ \end{aligned}$$

が成り立つ．④，⑤ より

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)