複素数 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と自然数 L をとる．次の問いに答えよ．

(1) $k,\ m$ が整数ならば，$|k+m\omega|^2$ も整数であることを示せ．

(2) $|k| \leqq L$ を満たす整数 k に対して，$|k+\omega|$ の最大値を求めよ．

(3) 整数 $k,\ m$ が $|k| \leqq L$，$|m| \leqq L$，$|k-m| \leqq L$ を満たすとき，$|k+m\omega| \leqq L$ を示せ．

(4) $|k+m\omega| \leqq L$ を満たす整数の組 $(k,\ m)$ の個数を N とする．不等式 $N \geqq 3L^2+3L+1$ を示せ．

(23 金沢大 理系 4)

【答】

(1) 略

(2) $k=-L$ のとき $\sqrt{L^2+L+1}$

(3) 略

(4) 略

【解答】

(1) $k,\ m$ が整数 (実数)，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}|k+m\omega|^2 &= (k+m\omega)(k+m\overline{\omega})\\ &= k^2+km(\omega+\overline{\omega})+m^2|\omega|^2\end{aligned}$$

であり，$\omega+\overline{\omega}=1$，$|\omega|^2=1$ であるから

$$|k+m\omega|^2 = k^2-km+m^2$$

である．よって，$k,\ m$ が整数ならば，$|k+m\omega|^2$ も整数である．　……(証明終わり)

(2) $|k+\omega|^2$ は，(1) において $m=1$ としたものであるから

$$\begin{aligned}|k+\omega|^2 &= k^2-k+1\\ &= \left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

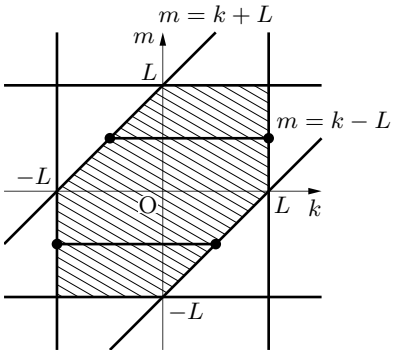
整数 k は $|k| \leqq L$ すなわち $-L \leqq k \leqq L$ (L は自然数) を満たすから，$|k+\omega|$ は

$k=-L$ のとき最大値 $\boldsymbol{\sqrt{L^2+L+1}}$　……(答)

をとる．

(3)
$$(*)\begin{cases}|k| \leqq L\\ |m| \leqq L\\ |k-m| \leqq L\end{cases}$$

$(*)$ を図示すると右図の斜線部分となる．$k,\ m$ が $(*)$ を満たすとき，$|k+m\omega|^2 = k^2-km+m^2$ の最大値を求める．



(i) $-L \leqq m \leqq 0$ のとき m を固定したとき

$$k^2-km+m^2 = \left(k-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m^2$$

k は $-L \leqq k \leqq m+L$ の範囲で動くから，

$k=-L,\ m+L$ で最大値 $M = L^2+mL+m^2$ をとる．

ついで，m を $-L \leqq m \leqq 0$ の範囲で動かし，M の最大値を求める．

$$M = m^2 + Lm + L^2 = \left(m + \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}L^2$$

であり，M は $m = -L,\ 0$ で最大値 L^2 をとる．

(ii) $0 \leqq m \leqq L$ のとき m を固定したとき

$$k^2 - km + m^2 = \left(k - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}m^2$$

k は $m - L \leqq k \leqq L$ の範囲で動くから，$k = m - L,\ L$ で最大値 $M = L^2 - mL + m^2$ をとる．

ついで，m を $0 \leqq m \leqq L$ の範囲で動かし，M の最大値を求める．

$$M = m^2 - Lm + L^2 = \left(m - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}L^2$$

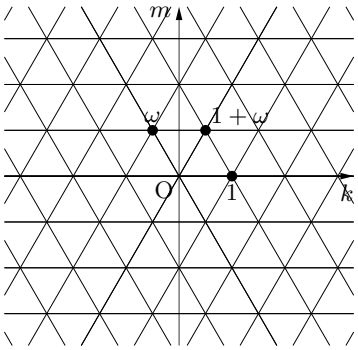
であり，M は $m = 0,\ L$ で最大値 L^2 をとる．

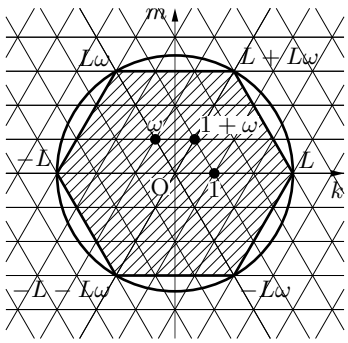
(i)，(ii) より，$k^2 - km + m^2$ の最大値は L^2 である．
よって，$k,\ m$ が $(*)$ を満たすとき，$|k + m\omega| \leqq L$ が成り立つ．　　…… (証明終わり)

- $k,\ m$ が整数のとき，$k + m\omega$ は下左図の格子点となり，$(*)$ を満たす $k + m\omega$ は下右図の格子点となる．これらは原点 O が中心 1 辺の長さが L の正六角形の周および内部の格子点である．この正六角形の外接円の半径も L であるから

  $$|k + m\omega| \leqq L$$

  は成り立つ．





(4) $|k| \leqq L$，$|m| \leqq L$，$|k - m| \leqq L$ を満たす格子点 $(k,\ m)$ の個数 M は，(3) より $N \geqq M$ である．

(3) の図において，1 辺の長さが $2L$ の正方形から，左上，右下の直角二等辺三角形を除くと考えると，M の格子点の個数は

$$\begin{aligned} M &= (2L+1)^2 - 2 \times (1 + 2 + \cdots + L) \\ &= (4L^2 + 4L + 1) - 2 \times \frac{L(L+1)}{2} \\ &= 3L^2 + 3L + 1 \end{aligned}$$

よって，$N \geqq 3L^2 + 3L + 1$ が成り立つ．　　…… (証明終わり)