2 つの整数 253 と 437 の最大公約数を d として，不定方程式

$$253x-437y=d$$

を考える．この不定方程式の整数解 $(x,\ y)$ のうち，原点 $(0,\ 0)$ との距離が最小の整数解を $(a,\ b)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) d を求めよ．

(2) $(a,\ b)$ を求めよ．

(3) i を虚数単位とし，複素数 $z=a+b\,i$ を考える．z の偏角を θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とするとき，$k\theta>\dfrac{\pi}{2}$ となるような最小の自然数 k を求めよ．

(23 電気通信大 後 5(2))

【答】

(1) 23
(2) (7, 4)
(3) 4

【解答】

(1) $253=11\cdot23,\ 437=19\cdot23$ より，253 と 437 の最大公約数 d は

$$\boldsymbol{d=23}$$ ……(答)

である．

- ユークリッドの互除法より

$$437=253\cdot1+184$$
$$253=184\cdot1+69$$
$$184=69\cdot2+46$$
$$69=46\cdot1+23$$
$$46=23\cdot2+0$$

1	437	253	1
	253	184	
2	184	69	1
	138	46	
2	46	**23**	
	46		
	0		

よって，253 と 437 の最大公約数 d は $d=23$ である．

(2) $253x-473y=23$ より

$$11x-19y=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

① は $(x,\ y)=(7,\ 4)$ で成り立つから

$$11\cdot7-19\cdot4=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$11(x-7)-19(y-4)=0$$
$$\therefore\quad 11(x-7)=19(y-4)$$

となる．11 と 19 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases}x-7=19k\\y-4=11k\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}x=7+19k\\y=4+11k\end{cases}$$

と表すことができる．原点と点 $(7+19k,\ 4+11k)$ の距離 x^2+y^2 は

$k=0$ のとき，$x^2+y^2=7^2+4^2=65$
$k\geqq1$ のとき，$x^2+y^2\geqq26^2+15^2>65$
$k\leqq-1$ のとき，$x^2+y^2\geqq(-12)^2+(-7)^2>65$

であるから，$k=0$ のとき最小となる．

よって，原点との距離が最小となる整数解 $(a,\ b)$ は

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(7,\ 4)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $z=7+4i$ の偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は

$$z=7+4i=\sqrt{65}\left(\frac{7}{\sqrt{65}}+\frac{4}{\sqrt{65}}i\right)$$

より

$$\cos\theta=\frac{7}{\sqrt{65}},\ \sin\theta=\frac{4}{\sqrt{65}} \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

を満たす角である．これより

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{49}{65}-1=\frac{98-65}{65}=\frac{33}{65}>0$$

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{4\cdot 7^3}{65\sqrt{65}}-\frac{3\cdot 7}{\sqrt{65}}=\frac{7(196-195)}{65\sqrt{65}}=\frac{7}{65\sqrt{65}}>0$$

$$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2\left(\frac{33}{65}\right)^2-1=\frac{2178}{4225}-1<0$$

であり，$0<\theta<2\theta<3\theta<\dfrac{\pi}{2}<4\theta$ である．

よって $k\theta>\dfrac{\pi}{2}$ となる最小の自然数 k は

$$\boldsymbol{k=4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．