等差数列 100, 97, 94, 91, $\cdots$ の第 n 項を a_n とする．また，初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(1) a_n を n を用いて表せ．
(2) S_n が最大となるときの n の値と，その n に対する S_n の値を求めよ．
(3) S_n が負となるような最小の自然数 n を求めよ．また，その n に対する a_n の値を求めよ．

(23 公立小松大 1)

【答】

(1) $a_n = 103 - 3n$
(2) $n = 34$ のとき最大値 1717
(3) $n = 68$，$a_{68} = -101$

【解答】

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ は 100, 97, 94, 91, $\cdots$ であり，初項 100，公差 -3 であるから，一般項 a_n は

$$a_n = 100 - 3(n-1) = \boldsymbol{103 - 3n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) S_n が最大値となるのは $a_n \geqq 0$ となる a_n の総和である．

$$103 - 3n \geqq 0 \qquad \therefore \quad n \leqq \frac{103}{3} = 34 + \frac{1}{3}$$

n は自然数であり，$a_n \geqq 0$ となるのは $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 34$ のときである．よって，S_n が最大となる n の値は

$$\boldsymbol{n = 34} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり，この n に対する S_n の値は

$$S_{34} = \frac{34(a_1 + a_{34})}{2} = \frac{34(100+1)}{2} = \boldsymbol{1717} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3)
$$S_n = \frac{n\{100 + (103 - 3n)\}}{2} = \frac{n(203 - 3n)}{2}$$

S_n が負となるような最小の自然数 n は $203 - 3n < 0$ より，$n > \dfrac{203}{3} = 67 + \dfrac{2}{3}$ であり，求める n は

$$\boldsymbol{n = 68} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．このときの a_n の値は

$$a_{68} = 103 - 3 \cdot 68 = 103 - 204 = \boldsymbol{-101} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．