数列 $\{a_n\}$ に関して，初項は 2 で．各項の逆数を並べてできる数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は公差 d の等差数列となる．このとき，次の問いに答えよ．

(i) a_n を n と d を用いて表せ．

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 3 項までの和が 4 である．このとき，d および a_3 の値を求めよ．

(23 東北学院大 文系・情報 B 6)

【答】

(i) $a_n = \dfrac{2}{1+2(n-1)d}$

(ii) $(d,\ a_3) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ 2(\sqrt{2}-1)\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ -2(\sqrt{2}+1)\right)$

【解答】

(i) 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{2}$，公差 d の等差数列であるから，一般項 $\dfrac{1}{a_n}$ は

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{2} + (n-1)d \\ &= \frac{1+2(n-1)d}{2}\end{aligned}$$

である．よって

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{1+2(n-1)d}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) 与えられた条件より

$$\begin{aligned}&a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\ &2 + \frac{2}{1+2d} + \frac{2}{1+4d} = 4 \\ &\frac{1}{1+2d} + \frac{1}{1+4d} = 1 \\ &(1+4d) + (1+2d) = (1+2d)(1+4d) \\ &2 + 6d = 1 + 6d + 8d^2 \\ &8d^2 - 1 = 0 \qquad \therefore\quad d = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{d = \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ のとき，$\boldsymbol{a_3} = \dfrac{2}{1+4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{2}} = \boldsymbol{2(\sqrt{2}-1)}$ ……(答)

$\boldsymbol{d = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ のとき，$\boldsymbol{a_3} = \dfrac{2}{1-4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{2}{1-\sqrt{2}} = \boldsymbol{-2(\sqrt{2}+1)}$ ……(答)

である．