以下で定める数列

$$a_1 = 36, \quad a_2 = 3636, \quad a_3 = 363636, \quad a_4 = 36363636, \quad \cdots$$

について，以下の問いに答えなさい．

(a) a_n を n を用いて表しなさい．
(b) 初項から第 n 項までの和 S_n を n を用いて表しなさい．

(23 福島大 食農 2(1))

【答】

(a) $a_n = \dfrac{4(100^n - 1)}{11}$

(b) $S_n = \dfrac{4(100^{n+1} - 99n - 100)}{1089}$

【解答】

(a) a_n は 36 を n 回繰り返して書いたものであり

$$a_1 = 36,$$
$$a_{n+1} = 100a_n + 36 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす．

$$\alpha = 100\alpha + 36 \qquad \cdots\cdots ②$$

を解くと $\alpha = -\dfrac{4}{11}$ であり，①，② の辺々を引くと

$$a_{n+1} + \frac{4}{11} = 100\left(a_n + \frac{4}{11}\right)$$

を得る．数列 $\left\{a_n + \dfrac{4}{11}\right\}$ は初項 $a_1 + \dfrac{4}{11} = 36 + \dfrac{4}{11} = \dfrac{400}{11}$，公比 100 の等比数列であるから

$$a_n + \frac{4}{11} = \frac{400}{11} \cdot 100^{n-1}$$
$$\therefore \quad a_n = \frac{4}{11} \cdot 100^n - \frac{4}{11} = \boldsymbol{\frac{4(100^n - 1)}{11}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(b) (a) の結果より

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{4}{11}\sum_{k=1}^{n}(100^k - 1) \\ &= \frac{4}{11}\left\{\frac{100 \cdot (100^n - 1)}{100 - 1} - n\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{4(100^{n+1} - 99n - 100)}{1089}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．