初項 $a_1=2$ の等差数列 $\{a_n\}$ と初項 $b_1=0$ の等差数列 $\{b_n\}$ があり，ある自然数 k に対して $a_{k+1}=b_{k+1}$ と $a_{2k+1}=0$ がどちらも成立している．これらの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を用いて，数列 $\{c_n\}$ を $c_1=1$，$c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot c_n$(ただし，$n$ は自然数) と定めるとき，以下の設問に答えよ．

(1) a_2 を k を用いて表し，a_{k+1} の値を求めよ．
(2) b_2 を k を用いて表し，b_{2k+1} の値を求めよ．
(3) c_k を k を用いて表し，c_{2k} の値を求めよ．
(4) c_n が最大値をとるときの n を，k を用いて表せ．
(5) $\displaystyle\sum_{r=1}^{2k} c_r$ を，k を用いて表せ．

(23 関西医大 2)

【答】

(1) $a_2=2-\dfrac{1}{k}$，$a_{k+1}=1$
(2) $b_2=\dfrac{1}{k}$，$b_{2k+1}=2$
(3) $c_k=\dfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}\ (n\geqq 1)$，$c_{2k}=1$
(4) $n=k,\ k+1$
(5) $\displaystyle\sum_{r=1}^{2k} c_r=2^{2k-1}$

【解答】

等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の公差をそれぞれ $p,\ q$ とおくと

$$a_n=2+(n-1)p$$
$$b_n=(n-1)q$$

である．さらに，ある自然数 k に対して

$$a_{k+1}=b_{k+1} \qquad \cdots\cdots ①$$
$$a_{2k+1}=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成立している．

(1) ② より

$$2+\{(2k+1)-1\}p=0 \qquad \therefore \quad p=-\frac{1}{k}$$
$$\therefore \quad a_n=2+(n-1)\left(-\frac{1}{k}\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

よって

$$\boldsymbol{a_2=2-\frac{1}{k}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$\boldsymbol{a_{k+1}}=2+\{(k+1)-1\}\left(-\frac{1}{k}\right)=\boldsymbol{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ①, ③ より

$$2+\{(k+1)-1\}\left(-\frac{1}{k}\right)=\{(k+1)-1\}q \qquad \therefore \quad q=\frac{1}{k}$$

$$\therefore \quad b_n=\frac{n-1}{k} \qquad \cdots\cdots ④$$

よって

$$\boldsymbol{b_2=\frac{1}{k}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{b_{2k+1}}=\frac{(2k+1)-1}{k}=\mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ③, ④ の n を $n+1$ と置き換えて $c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot c_n$ に代入すると

$$c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot c_n=\frac{2-\dfrac{n}{k}}{\dfrac{n}{k}}\cdot c_n=\frac{2k-n}{n}\cdot c_n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を得る．⑤ を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
c_{n+1}&=\frac{2k-n}{n}\cdot\frac{2k-(n-1)}{n-1}\cdot c_{n-1}\\
&=\frac{2k-n}{n}\cdot\frac{2k-(n-1)}{n-1}\cdot\frac{2k-(n-2)}{n-2}\cdot c_{n-2}\\
&\ \vdots\\
&=\frac{2k-n}{n}\cdot\frac{2k-(n-1)}{n-1}\cdot\frac{2k-(n-2)}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{1}\cdot c_1\\
&=\frac{2k-n}{n}\cdot\frac{2k-(n-1)}{n-1}\cdot\frac{2k-(n-2)}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{1} \qquad \cdots\cdots ⑥\\
&\qquad (\because\ c_1=1)
\end{aligned}$$

c_k は $n=k-1$ とおけばよく，$k \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
c_k&=\frac{2k-(k-1)}{k-1}\cdot\frac{2k-(k-2)}{k-2}\cdot\frac{2k-(k-3)}{k-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{1}\\
&=\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{k+2}{k-2}\cdot\frac{k+3}{k-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{1}\\
&=\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}
\end{aligned}$$

$c_1=1$ であるから，これは $k=1$ のときも成り立つ．

$$\boldsymbol{c_k=\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} \quad (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，$n=2k-1$ とおくと

$$\begin{aligned}
c_{2k}&=\frac{2k-(2k-1)}{2k-1}\cdot\frac{2k-(2k-2)}{2k-2}\cdot\frac{2k-(2k-3)}{2k-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{1}\\
&=\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{2}{2k-2}\cdot\frac{3}{2k-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{1}\\
&=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．

(4) ⑤ において，$n=2k$ とおくと

$$c_{2k+1}=\frac{2k-2k}{2k}c_{2k}=0$$

であるから，$n \geqq 2k+1$ のとき，⑤ を繰り返し用いると

$$c_{2k+1} = c_{2k+2} = \cdots = 0 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

である．

$1 \leqq n \leqq 2k$ での $\{c_n\}$ の増減を調べる．$1 \leqq n \leqq 2k-1$ のとき，$\dfrac{2k-n}{n} > 0$ かつ $c_1 = 1(>0)$ より，⑤ を繰り返し用いると $c_n > 0\ (1 \leqq n \leqq 2k)$ が成り立つ．

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} - 1 = \frac{2k-n}{n} - 1 = \frac{2(k-n)}{n}$$

であり，$n = k$ を境に $\{c_n\}$ の増減は変わる．$c_n > 0\ (1 \leqq n \leqq 2k)$ より

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq k-1 \text{ のとき} & \dfrac{c_{n+1}}{c_n} > 1 \quad \therefore\ c_n < c_{n+1} \\ n = k \text{ のとき} & \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 1 \quad \therefore\ c_k = c_{k+1} \\ k+1 \leqq n \leqq 2k-1 \text{ のとき} & \dfrac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \quad \therefore\ c_n > c_{n+1} \end{cases} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦, ⑧ あわせると

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{c_1} < c_2 < \cdots < c_k = c_{k+1},\ c_{k+1} > c_{k+2} > \cdots > \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{c_{2k}} > \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{c_{2k+1}} = \cdots$$

よって，c_n が最大値をとるときの n は

$$\boldsymbol{n = k,\ k+1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(5) ⑥ において，n を $r-1$ とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{2k} c_r &= \sum_{r=1}^{2k} \frac{2k-(r-1)}{r-1} \cdot \frac{2k-(r-2)}{r-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2k-1}{1} \\ &= \sum_{r=1}^{2k} \frac{(2k-1)!}{(2k-r)!(r-1)!} \\ &= \sum_{r=1}^{2k} {}_{2k-1}\mathrm{C}_{r-1} \\ &= \sum_{r=0}^{2k-1} {}_{2k-1}\mathrm{C}_{r} \\ &= (1+1)^{2k-1} \quad (\because\ \text{二項定理}) \\ &= \boldsymbol{2^{2k-1}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．