$d,\ r$ は実数で，$r>0$ とする．数列 $\{a_n\}$ は $a_1=2$ で公差が d の等差数列とする．数列 $\{b_n\}$ は $b_1=4$ で公比が r の等比数列とする．さらに．数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n=\begin{cases} a_n & (a_n \geqq b_n \text{ のとき}) \\ b_n & (a_n < b_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $c_3=c_4=3$ となるような $d,\ r$ を求めよ．

(2) $d=-\dfrac{1}{64},\ r=\dfrac{1}{2}$ のとき，$c_n=a_n$ を満たす最大の n を求めよ．

(3) $d=9,\ r=2$ のとき．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ を求めよ．

(23 高知大 医・理工 3)

【答】

(1) $d=\dfrac{1}{3},\ r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $n=128$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k=\begin{cases} 4 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 15 & (n=2 \text{ のとき}) \\ 2^{n+2}+3 & (n \geqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】

$$a_n=2+(n-1)d, \quad b_n=4r^{n-1}\ (r>0)$$

(1) (i) $c_3=3$ について

$a_3=2+2d,\ b_3=4r^2$ より

$$c_3=\begin{cases} 2+2d & (2+2d \geqq 4r^2) \\ 4r^2 & (2+2d < 4r^2) \end{cases}$$

であるから

$$c_3=3 \iff \begin{cases} 2+2d=3 \\ 1+d \geqq 2r^2 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} 4r^2=3 \\ 1+d<2r^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4} \geqq r^2 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} r^2=\dfrac{3}{4} \\ d<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$r>0$ であるから

$$\iff \begin{cases} d=\dfrac{1}{2} \\ 0<r \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ または } \begin{cases} r=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ d<\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

(ii) $c_4=3$ について

$a_4=2+3d,\ b_4=4r^3$ より

$$c_4=\begin{cases} 2+3d & (2+3d \geqq 4r^3) \\ 4r^3 & (2+3d < 4r^3) \end{cases}$$

であるから

$$c_4 = 3 \iff \begin{cases} 2+3d=3 \\ 2+3d \geqq 4r^3 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 4r^3=3 \\ 2+3d < 4r^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{4} \geqq r^3 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} r^3=\dfrac{3}{4} \\ d<\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=\dfrac{1}{3} \\ 0<r \leqq \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} r=\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \\ d<\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

(i)，(ii) より

$$c_3 = c_4 = 3 \iff ① \text{ かつ } ②$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} < \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$ に注意すると

$$\iff \begin{cases} r=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ d<\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} d=\dfrac{1}{3} \\ 0<r \leqq \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \end{cases}$$

よって，条件を満たすたす d, r の値は

$$\boldsymbol{d=\frac{1}{3}, \quad r=\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $d=-\dfrac{1}{64}$, $r=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$a_n = 2-\frac{n-1}{64}, \quad b_n = \frac{1}{2^{n-3}}$$

であり

$$c_n = a_n \iff a_n \geqq b_n \iff 2-\frac{n-1}{64} \geqq \frac{1}{2^{n-3}} \qquad \cdots\cdots ③$$

である．③ の右辺は正であるから

$$2-\frac{n-1}{64} > 0 \qquad \therefore \quad n < 129$$

であることが必要である．

$$a_{128} - b_{128} = \left(2-\frac{127}{64}\right) - \frac{1}{2^{125}} = \frac{1}{64} - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2^{119}} > 0$$

であるから，③ を満たす最大の n の値は

$$\boldsymbol{n=128} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $d=9$, $r=2$ のとき

$$a_n = 2+(n-1)9 = 9n-7,$$
$$b_n = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

ある n 以上ではつねに $a_n < b_n$ が成り立つはずである．

n	1	2	3	4	$\cdots$
a_n	2	11	20	29	$\cdots$
b_n	4	8	16	32	$\cdots$
c_n	b_1	a_2	a_3	b_4	$\cdots$

これにより

「$n \geqq 4$ においては $a_n < b_n$ である」…… $(*)$

と推測される．$(*)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 4$ のとき
　上の表より $a_4 < b_4$ であり．$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ $(\geqq 4)$ のときの成立を仮定する．

$$\begin{aligned} b_{k+1} - a_{k+1} &= 2b_k - (a_k + 9) \\ &= b_k - a_k + b_k - 9 \\ &> (b_k - a_k) + b_4 - 9 \\ &= (b_k - a_k) + 32 - 9 \\ &= (b_k - a_k) + 23 \\ &> 23 \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

であるから，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，$k \geqq 4$ においては $(*)$ は成り立つ．

よって，$\sum_{k=1}^{n} c_k$ は

$n = 1$ のとき $\sum_{k=1}^{1} c_k = b_1 = 4$

$n = 2$ のとき $\sum_{k=1}^{2} c_k = b_1 + a_2 = 4 + 11 = 15$

$n = 3$ のとき $\sum_{k=1}^{3} c_k = b_1 + a_2 + a_3 = 15 + 20 = 35$

$n \geqq 4$ のとき $\sum_{k=1}^{n} c_k = 35 + \sum_{k=4}^{n} 2^{k+1} = 35 + 2^5 \cdot \dfrac{2^{n-3} - 1}{2 - 1} = 2^{n+2} + 3$

$n = 3$ のとき $2^{n+2} + 3 = 35$ であるから

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} c_k = \begin{cases} 4 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 15 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 2^{n+2} + 3 & (n \geqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．