n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ が成り立つことを示せ．

(23 山梨大 工 1(2) 教 1(1))

【答】 略

【解答】

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$ とおく．

$$\begin{aligned} S_n &= 0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2}S_n &= \qquad\qquad 0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

辺々の差をとると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} S_n &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

- 結果が与えられているので，数学的帰納法を用いこともできる．

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots (*)$$

(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^{1}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0$$

$$(\text{右辺}) = 1-(1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1-1 = 0$$

であり，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=l$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{l+1}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ =&\sum_{k=1}^{l}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \{(l+1)-1\}\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} \\ =&1-(l+1)\left(\frac{1}{2}\right)^l + l\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} \qquad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\ =&1-2(l+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} + l\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} \\ =&1-(l+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} \end{aligned}$$

$n=l+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．