座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．自然数 n に対して，座標平面において連立不等式

$$y \leqq -\frac{1}{3}x^2+3n^2,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

によって表される領域を D_n とする．

(1) D_1 に含まれる格子点の総数を求めよ．
(2) D_n に含まれ，かつ直線 $x=0$ 上にある格子点の総数を n を用いて表せ．
(3) D_n に含まれ，かつ直線 $x=1$ 上にある格子点の総数を n を用いて表せ．
(4) 自然数 k に対して，D_n に含まれ，かつ直線 $x=3k-2$ 上にある格子点の総数を k, n を用いて表せ．
(5) D_n に含まれる格子点の総数を n を用いて表せ．

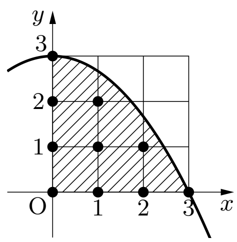
(23 東京海洋大 海洋工 3)

【答】
(1) 10
(2) $3n^2+1$
(3) $3n^2$
(4) $-3k^2+4k+3n^2-1$
(5) $6n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n+1$

【解答】
(1) 領域 D_1 は右図の斜線部分である．境界も含む．D_1 に含まれる格子点は図の黒丸であり，その総数は

$\mathbf{10}$ (個) ……(答)

である．



(2) 領域 D_n に含まれ，かつ直線 $x=0$ 上にある格子点は

$$(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \cdots,\ \left(0,\ 3n^2\right)$$

であり，総数は

$\boldsymbol{3n^2+1}$ (個) ……(答)

である．
(3) 放物線 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+3n^2$ と直線 $x=1$ の交点の座標は $\left(1,\ 3n^2-\dfrac{1}{3}\right)$ である．よって，D_n に含まれ，かつ直線 $x=1$ 上にある格子点は

$$(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ \cdots,\ \left(1,\ 3n^2-1\right)$$

であり，総数は

$\boldsymbol{3n^2}$ (個) ……(答)

である．
(4) 放物線 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+3n^2$ と直線 $x=3k-2$ の交点の y 座標は

$$y=-\frac{1}{3}(3k-2)^2+3n^2=-3k^2+4k+3n^2-\frac{4}{3}$$

である．よって，D_n に含まれ，かつ直線 $x=3k-2$ 上にある格子点は

$$(3k-2,\ 0),\ (3k-2,\ 1),\ \cdots,\ \left(3k-2,\ -3k^2+4k+3n^2-2\right)$$

であり，総数は

$\boldsymbol{-3k^2+4k+3n^2-1}$ (個) …… ① ……(答)

である．

(5) (4) と同じく，D_n に含まれ，かつ直線 $x=3k-1$ 上にある格子点は

$$(3k-1,\ 0),\ (3k-1,\ 1),\ \cdots,\ \big(3k-1,\ -3k^2+2k+3n^2-1\big)$$

であり，総数は

$$-3k^2+2k+3n^2 \text{ 個} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．また，D_n に含まれ，かつ直線 $x=3k$ 上にある格子点は

$$(3k,\ 0),\ (3k,\ 1),\ \cdots,\ \big(3k,\ -3k^2+3n^2\big)$$

であり，総数は

$$-3k^2+3n^2+1 \text{ (個)} \qquad \cdots\cdots ③$$

である．①，②において k の取り得る値の範囲は $1 \leqq k \leqq n$ であり，③において k の取り得る値の範囲は $0 \leqq k \leqq n$ であるから，求める格子点の総数は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-3k^2+4k+3n^2-1)+\sum_{k=1}^{n}(-3k^2+2k+3n^2)+\sum_{k=0}^{n}(-3k^2+3n^2+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-9k^2+6k+9n^2)+3n^2+1\\
&=-\frac{9}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{6}{2}n(n+1)+9n^2\cdot n+3n^2+1\\
&=-\frac{3}{2}(2n^3+3n^2+n)+3(n^2+n)+9n^3+3n^2+1\\
&=\boldsymbol{6n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1} \text{ (個)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}$$

である．