一般項が，$a_n = -n^2 + 16n - 47$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で表される数列 $\{a_n\}$ のうち，$a_n > 0$ となる項の和は $\boxed{\text{（ウ）}}$ である．

(23 東北学院大 工・情報 A 1(3))

【答】

（ウ）
93

【解答】

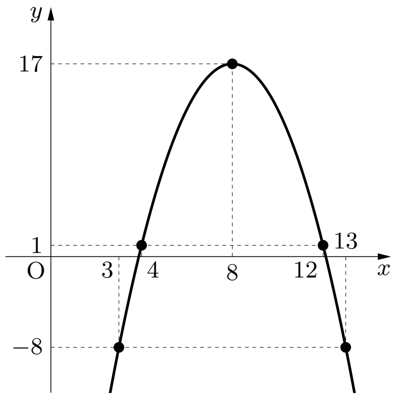
$f(x) = -x^2 + 16x - 47$ とおくと

$$f(x) = -(x-8)^2 + 17$$

である．また

$$f(3) = f(13) = -8 < 0$$
$$f(4) = f(12) = 1 > 0$$

であるから，$y = f(x)$ のグラフは右図となる．



$a_n > 0$ となるのは $n = 4,\ 5,\ \cdots,\ 12$ のときであり，求める和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=4}^{12} f(n)\\
&= \left\{\sum_{n=1}^{12}(-n^2 + 16n - 47)\right\} - \{f(1) + f(2) + f(3)\}\\
&= -\frac{1}{6}\cdot 12\cdot 13\cdot 25 + 16\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13 - 47\cdot 12 - (-32 - 19 - 8)\\
&= -650 + 1248 - 564 + 59\\
&= 93
\end{aligned}$$

である．

- グラフの対称性を考えると，求める和は

$$\begin{aligned}
&2\{f(4) + f(5) + f(6) + f(7)\} + f(8)\\
&= 2(1 + 8 + 13 + 16) + 17\\
&= 2\cdot 38 + 17\\
&= 93
\end{aligned}$$

である．