正の値をとる等比数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2023}=27,\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}=3$$

をみたす．このとき，初項 a_1 から第 2023 項 a_{2023} までの積 $a_1a_2\cdots a_{2023}$ の値を求めなさい．ただし，一般項 a_n は $a_n=ar^{n-1}$ と表されることをもちいてよい．

(23 福島大 後 食農 1(3))

【答】 問題不成立

【解答】

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2023}=27 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}=3 \qquad \cdots\cdots ②$$

正の値をとる等比数列 $\{a_n\}$ を $a_n=ar^{n-1}$ $(a>0,\ r>0)$ とおく．

$r=1$ とすると，①, ② はそれぞれ

$$2023a=27,\ 2023\frac{1}{a}=3 \qquad 順に \quad a=\frac{27}{2023},\ a=\frac{2023}{3}$$

となり，不合理．したがって，$r\neq 1$ である．

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2023}=\sum_{k=1}^{2023}ar^{k-1}=a\frac{r^{2023}-1}{r-1}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}=\sum_{k=1}^{2023}\frac{1}{ar^{k-1}}=\frac{1}{a}\frac{\frac{1}{r^{2023}}-1}{\frac{1}{r}-1}=\frac{1}{ar^{2022}}\frac{1-r^{2023}}{1-r}$$

であるから

$$① \iff a(r^{2023}-1)=27(r-1)$$

$$② \iff r^{2023}-1=3ar^{2022}(r-1)$$

である．また

$$\begin{aligned}a_1a_2\cdots a_{2023}&=a\cdot ar\cdot ar^2\cdots ar^{2022}\\&=a^{2023}\cdot r^{1+2+\cdots+2022}\\&=a^{2023}r^{\frac{2022\cdot 2023}{2}}\\&=(ar^{1011})^{2023}\end{aligned}$$

である．ここで，② を ① に代入すると

$$a\cdot 3ar^{2022}(r-1)=27(r-1)$$

$$a^2\cdot r^{2022}=9 \qquad \therefore \quad ar^{1011}=3\ (>0)$$

であるから

$$a_1a_2\cdots a_{2023}=3^{2023}$$

である．

- 条件をみたす数列 $\{a_n\}$ は存在しない．

  条件をみたす数列 $\{a_n\}$ が存在すると仮定すると，辺々を加えて

  $$\sum_{k=1}^{2023}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)=27+3 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

  $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2023$ に対し $a_k>0,\ \dfrac{1}{a_k}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係より

  $$(左辺)\geqq\sum_{k=1}^{2023}2\sqrt{a_k\cdot\frac{1}{a_k}}=\sum_{k=1}^{2023}2=2\times 2023=4046$$

  右辺は 30 であるから，等式 ㋐ は成立しない．すなわち，条件をみたす数列 $\{a_n\}$ は存在しない．