数列

$$1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とし，これを次のような群に分ける．

$$\underset{\text{第 1 群}}{1}\ \Big|\ \underset{\text{第 2 群}}{1,\ 3}\ \Big|\ \underset{\text{第 3 群}}{1,\ 3,\ 5,\ 7}\ \Big|\ \underset{\text{第 4 群}}{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15}\ \Big|\ \cdots$$

ここで，第 m 群 $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に含まれる項は 1 から 2^m-1 までの奇数であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 2023 という項が現れる最初の群は第何群であるか答えよ．

(2) 第 m 群 $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に含まれる項の総和 S_m を m の式で表せ．

(3) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \geqq 2023$ を満たす最小の自然数 n を N とするとき，第 N 項 a_N を含む群は第何群であるか答えよ．

(4) (3) で定めた N および a_N を求めよ．

(23 宇都宮大 地デ・工・農 1)

【答】

(1) 第 11 群

(2) $S_m=4^{m-1}$

(3) 第 7 群

(4) $N=89$，$a_N=51$

【解答】

(1) 2023 という項が現れる最初の群を第 m 群とすると

$$(\text{第 } m-1 \text{ 群の末項}) < 2023 \leqq (\text{第 } m \text{ 群の末項})$$

が成り立つ．

$$2^{m-1}-1 < 2023 \leqq 2^m-1$$

$$2^{m-1} < 2024 \leqq 2^m \qquad \cdots\cdots ①$$

$2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$ であるから，①を満たす m は 11 である．

よって，2023 という項が現れる最初の群は

第 11 群 ……(答)

である．

(2) 第 m 群には

$$1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2^m-1$$

という項が含まれる．k 番目の奇数は $2k-1$ と表せるから，$2k-1=2^m-1$ を満たす k は $k=\dfrac{2^m}{2}=2^{m-1}$ である．すなわち，第 m 群には 2^{m-1} 個の項がある．

よって，第 m 群に含まれる項の総和 S_m は

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{2^{m-1}\{1+(2^m-1)\}}{2} \\ &= 2^{2m-2} \\ &= \boldsymbol{4^{m-1}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) N は $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \geqq 2023$ を満たす最小の自然数 n であるから，a_N が第 l 群にあるとすると

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_N=\sum_{m=1}^{l-1}S_m+(1+3+\cdots+a_N) \leqq \sum_{m=1}^{l}S_m$$

であり，l は

$$2023 \leqq \sum_{m=1}^{l}S_m \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす最小の自然数である．

$$\sum_{m=1}^{l}S_m=\sum_{m=1}^{l}4^{m-1}=\frac{1\cdot(4^l-1)}{4-1}=\frac{4^l-1}{3}$$

であるから

$$② \iff 2023 \leqq \frac{4^l-1}{3}$$

$$\therefore \quad 6070 \leqq 4^l$$

$4^6=2^{12}=4096,\ 4^7=16384$ であるから，② を満たす最小の自然数 l は 7 である．

よって，a_N を含む群は，**第 7 群** である． ……(答)

(4) 第 6 群の末項までの総和は

$$\sum_{m=1}^{6}S_m=\sum_{m=1}^{6}4^{m-1}=\frac{1\cdot(4^6-1)}{4-1}=\frac{4095}{3}=1365$$

である．第 m 群に含まれる項数は 2^{m-1} だから，第 6 群の末項までの項数は

$$\sum_{m=1}^{6}2^{m-1}=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}=63$$

である．

$$1365+(a_{64}+a_{65}+\cdots+a_N) \geqq 2023$$

$$a_{64}+\cdots+a_N \geqq 658 \qquad \cdots\cdots ③$$

a_N が第 7 群の j 番目にあるとすると

$$\begin{aligned}a_{64}+a_{65}+\cdots+a_N&=1+3+\cdots+(2j-1)\\&=\frac{j\{1+(2j-1)\}}{2}\\&=j^2\end{aligned}$$

$$③ \iff j^2 \geqq 658$$

$25^2=625,\ 26^2=676$ より，③ を満たす最小の j は 26 である．

よって，条件を満たす N と a_N は

$N=63+26=\mathbf{89}$, ……(答)

$a_N=a_{89}=$ (第 7 群の 26 番目の項) $=2\cdot 26-1=\mathbf{51}$ ……(答)

である．