数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1 = 0, \quad \frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{4}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(23 会津大 コンピュータ理工 6)

【答】

(1) $a_2 = \dfrac{1}{4}$，$a_3 = \dfrac{4}{9}$，$a_4 = \dfrac{9}{16}$

(2) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$，証明は略．

【解答】

$$a_1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{4}{n} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ① を ② に代入し，$n = 1,\ 2,\ 3$ として ② を用いると

$$\frac{1}{a_2} = 0 + \frac{4}{1} = 4 \qquad \therefore \quad a_2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{2} = \frac{9}{4} \qquad \therefore \quad a_3 = \boldsymbol{\frac{4}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\frac{1}{a_4} = \frac{4}{9} + \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \qquad \therefore \quad a_4 = \boldsymbol{\frac{9}{16}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) より

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

と推定される．すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$((*)\text{ の左辺}) = \left(\frac{1-1}{1}\right)^2 = 0$$

① を満たしており，$n = 1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．

$$\frac{1}{a_{k+1}} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 + \frac{4}{k} = \frac{(k^2 - 2k + 1) + 4k}{k^2} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$$\therefore \quad a_{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)