n を正の整数とし，命題 $P(n)$ を

「すべての整数 z に対して，$z^{3^n}-z^{3^{n-1}}$ は 3^n の倍数である」

とする．次の問いに答えよ．

(1) 命題 $P(1)$ が真であることを示せ．

(2) 命題 $P(2)$ が真であることを示せ．

(3) すべての正の整数 n に対して，命題 $P(n)$ が真であることを示せ．

(23 富山大 理・医・薬 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】

$P(n)$:「すべての整数 z に対して，$z^{3^n}-z^{3^{n-1}}$ は 3^n の倍数である」 …… $(*)$

(1) $n=1$ のとき

$$z^{3^1}-z^{3^0}=z^3-z=(z-1)z(z+1)$$

連続する 3 つの整数のいずれか 1 つは 3 の倍数であるから，$z^{3^1}-z^{3^0}$ は 3^1 の倍数である．
よって，$P(1)$ は真である． …… (証明終わり)

(2) $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} z^{3^2}-z^{3^1} &= z^9-z^3=(z^3)^3-z^3 \\ &= (z^3-z)^3-3z^3(-z)(z^3-z) \\ &= (z^3-z)^3+3z^4(z^3-z) \end{aligned}$$

(1) より z^3-z は 3 の倍数であるから，$(z^3-z)^3$ は 3^3 の倍数であり，$3z^4(z^3-z)$ は 3^2 の倍数である．したがって，$z^{3^2}-z^{3^1}$ は 3^2 の倍数である．
よって，$P(2)$ は真である． …… (証明終わり)

(3) すべての正の整数 n に対して，$P(n)$ が真であることを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=1$ のとき，(1) より，$P(1)$ は真である．

(ii) $n=k$ のとき，$P(k)$ が真であると仮定する．

$$\begin{aligned} z^{3^{k+1}}-z^{3^k} &= z^{3\cdot 3^k}-z^{3\cdot 3^{k-1}}=\left(z^{3^k}\right)^3-\left(z^{3^{k-1}}\right)^3 \\ &= \left(z^{3^k}-z^{3^{k-1}}\right)^3-3z^{3^k}\left(-z^{3^{k-1}}\right)\left(z^{3^k}-z^{3^{k-1}}\right) \\ &= \left(z^{3^k}-z^{3^{k-1}}\right)^3+3z^{3^k+3^{k-1}}\left(z^{3^k}-z^{3^{k-1}}\right) \end{aligned}$$

帰納法の仮定より，整数 Z を用いて $z^{3^k}-z^{3^{k-1}}=3^k\cdot Z$ と表すことができるから

$$\begin{aligned} z^{3^{k+1}}-z^{3^k} &= (3^k\cdot Z)^3+3z^{3^k+3^{k-1}}(3^k\cdot Z) \\ &= 3^{3k}\cdot Z^3+3^{k+1}z^{3^k+3^{k-1}}\cdot Z \\ &= 3^{k+1}(3^{2k-1}\cdot Z^3+z^{3^k+3^{k-1}}\cdot Z) \end{aligned}$$

k は 1 以上の整数であるから，$2k-1$, $k-1$ は 0 以上の整数であり，$3^{2k-1}\cdot Z^3+z^{3^k+3^{k-1}}\cdot Z$ は整数である．$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つから，$P(k+1)$ も真である．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について $P(n)$ は真である． …… (証明終わり)