数列 $\{a_n\}$，$\{b_j\}$ が次のように与えられているとする．ただし，r は正の定数とする．

$$a_1 = r^2 - 12r, \quad a_{n+1} = ra_n + (r-1)r^{2n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_1 = -29, \quad b_{j+1} - b_j = \frac{6}{1-4j^2} \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．さらに，n と r を用いて一般項 a_n を表す式を予想し，その予想が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．
(2) 一般項 b_j を j を用いて表せ．
(3) n を与えたとき，$a_n < b_j$ となる j が無限に多く存在するような r の範囲を n を用いて表せ．

(23 三重大 工 2)

【答】

(1) $a_2 = r^4 - 12r^2$，$a_3 = r^6 - 12r^3$，予想は $a_n = r^{2n} - 12r^n$，証明は略．
(2) $b_j = \dfrac{3}{2j-1} - 32 \quad (n \geqq 1)$
(3) $2^{\frac{2}{n}} \leqq r \leqq 2^{\frac{3}{n}}$

【解答】

$$a_1 = r^2 - 12r, \quad a_{n+1} = ra_n + (r-1)r^{2n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ①$$
$$b_1 = -29, \quad b_{j+1} - b_j = \frac{6}{1-4j^2} \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ②$$

(1) ① より

$$a_1 = r^2 - 12r$$
$$a_2 = r(r^2 - 12r) + (r-1)r^3 = \boldsymbol{r^4 - 12r^2} \quad \cdots\cdots(答)$$
$$a_3 = r(r^4 - 12r^2) + (r-1)r^5 = \boldsymbol{r^6 - 12r^3} \quad \cdots\cdots(答)$$

これより

$$a_n = r^{2n} - 12r^n \quad \cdots\cdots (*)$$

と予想される．$(*)$ を数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 = r^2 - 12r$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= ra_k + (r-1)r^{2k+1} \\ &= r(r^{2k} - 12r^k) + (r-1)r^{2k+1} \quad (\because\ 帰納法の仮定) \\ &= r^{2(k+1)} - 12r^{k+1} \end{aligned}$$

となるから，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対し，$(*)$ は成り立つ．　$\cdots\cdots$(証明終わり)

(2) ② より，$j \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_j &= b_1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{6}{1-4k^2} \\ &= -29 - 6\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= -29 - 6 \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= -29 - 3\left(1 - \frac{1}{2j-1}\right) \\ &= \frac{3}{2j-1} - 32 \end{aligned}$$

となる．これは $j=1$ のときも成り立つ．よって

$$\boldsymbol{b_j = \frac{3}{2j-1} - 32 \quad (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 数列 $\{b_j\}$ は単調に減少し，$\lim_{j \to \infty} b_j = -32$ であるから，$a_n < b_j$ となる j が無限に多く存在する条件は

$$a_n \leqq -32 \quad \text{すなわち} \quad r^{2n} - 12r^n \leqq -32$$

である．これを解くと

$$\begin{aligned} &(r^n)^2 - 12r^n + 32 \leqq 0 \\ &(r^n - 4)(r^n - 8) \leqq 0 \\ &4 \leqq r^n \leqq 8 \\ \therefore\ \ &\boldsymbol{2^{\frac{2}{n}} \leqq r \leqq 2^{\frac{3}{n}}} \quad (\because\ r > 0) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．